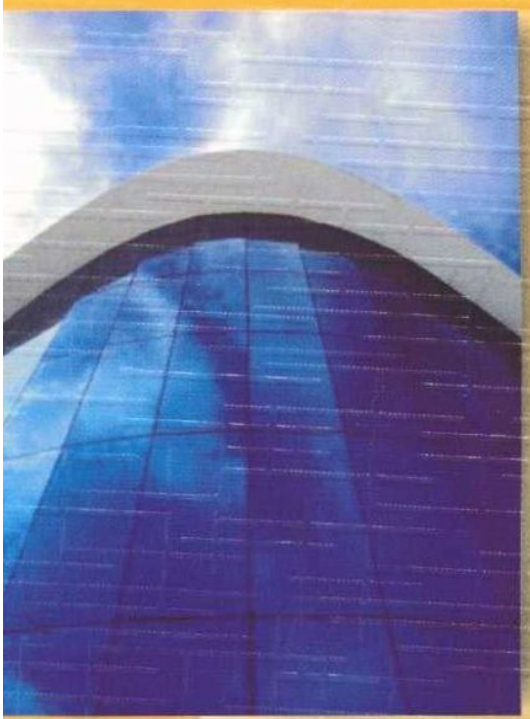
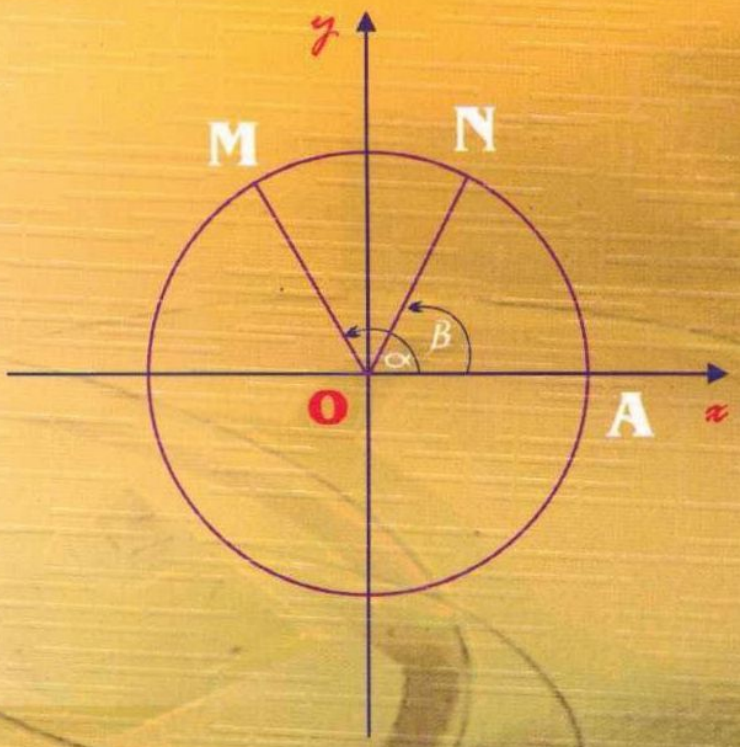
TS. NGUYỄN VIẾT ĐÔNG - PHẠM HOÀNG

TOÁN BỒI DƯỠNG VÀ NÂNG CAO

ĐẠI SỐ 10

(BỒI DƯỠNG HỌC SINH KHÁ, GIỎI)





NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS NGUYỄN VIẾT ĐÔNG – PHẠM HOÀNG

TOÁN
BỒI DƯỠNG VÀ NÂNG CAO
ĐẠI SỐ 10

BỒI DƯỠNG HỌC SINH KHÁ GIỎI

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04)9724852 (04)9724770 Fax: (04)9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: NGUYỄN BÁ THÀNH

Chịu trách nhiệm nội dung:

Biên tập : NGUYỄN MAI ĐỨC LÂM

Sửa bài in: TRẦN VĂN THẮNG

Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:
CÔNG TY SÁCH - THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

SÁCH LIÊN KẾT

TOÁN BỒI DƯỠNG VÀ NÂNG CAO ĐẠI SỐ 10

Mã số: 1L - 324 ĐH2008
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm tại Trung tâm Mỹ thuật ứng dụng
Số xuất bản: 573-2008/CXB/28-100/ĐHQGHN, ngày 27/06/2008
Quyết định xuất bản số: 324 LK/XB ngày 04/7/2008
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2008.

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển sách "***Toán bồi dưỡng và nâng cao Đại số 10***" sẽ giúp các em học sinh học thật tốt Toán 10, theo sát nội dung và trình tự kiến thức chương trình Toán nâng cao lớp 10 hiện hành.

Quyển sách được chia thành các chương sau:

Chương I: Mệnh đề – Tập hợp

Chương II: Hàm số bậc nhất và bậc hai

Chương III: Phương trình – Hệ phương trình

Chương IV: Bất đẳng thức và bất phương trình

Chương V: Thống kê

Chương VI: Góc lượng giác và công thức lượng giác

Chúng tôi tin rằng các em học sinh sẽ tìm được những điều thú vị, bổ ích trong quyển sách này và ngày càng học giỏi toán hơn!

Chúng tôi rất mong nhận được nhiều ý kiến đóng góp xây dựng của các bạn để những lần tái bản sau sách được hoàn chỉnh hơn. Xin trân trọng cám ơn!

TÁC GIẢ

Chương I. MỆNH ĐỀ. TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.

Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.

2. Với mỗi giá trị của biến thuộc tập hợp nào đó, mệnh đề chứa biến trở thành một mệnh đề.

3. Phủ định $\overline{P}$ của mệnh đề P là đúng khi P sai và sai khi P đúng.

4. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng và Q sai (trong mọi trường hợp khác $P \Rightarrow Q$ đều đúng).

5. Mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là $Q \Rightarrow P$.

6. Ta nói hai mệnh đề P và Q là hai mệnh đề tương đương nếu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

7. Kí hiệu $\forall$ đọc là với mọi. Kí hiệu $\exists$ đọc là tồn tại ít nhất một (hay có ít nhất một).

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến.

a) $\pi < 3,5$.

b) 2006 chia hết cho 4.

c) $n + 1 < 3$.

d) $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ.

Giải

a) Câu này là mệnh đề. Mệnh đề này đúng.

b) Câu này là mệnh đề. Mệnh đề này sai.

c) Câu này là mệnh đề chứa biến.

d) Câu này là mệnh đề. Mệnh đề này sai.

Bài 2. Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề. Lập mệnh đề phủ định của nó.

a) P: "3 > 2" b) Q: "$\sqrt{3}$ là số vô tỷ" c) R: "2007 chia hết cho 9"

Giải

a) P là mệnh đề đúng. $\overline{P}$: "$3 \leq 2$"

b) Q là mệnh đề đúng. $\overline{Q}$: "$\sqrt{3}$ là một số hữu tỷ "

c) R là mệnh đề đúng. $\overline{R}$: "2007 không chia hết cho 9"

Bài 3. Dùng các kí hiêu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Bình phương của mỗi số thực đều lớn hơn chính số đó.

b) Tất cả các số nguyên tố đều là số chẵn.

c) Mọi số tự nhiên n đều có $n^2 + 1$ không chia hết cho 3,

d) Có một số tự nhiên bình phương bằng 5.

Giải

a) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > x$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: n là nguyên tố và n chẵn.

c) $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

d) $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 = 5$.

Bài 4. Phát biểu thành lời mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng, sai của nó.

a) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$

b) $\exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 5$

c) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \neq -1$

d) $\forall n \in \mathbb{N}: 2n \neq 3$

Giải

a) Bình phương của mỗi số thực đều không âm.

Mệnh đề đúng.

b) Có một số hữu tỷ mà bình phương của nó bằng 5.

Mệnh đề sai vì $x = \pm\sqrt{5}$ thì $x^2 = 5$ mà $\pm\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

c) Mọi số thực x đều có $x^2 + 1 \neq -1$.

Mệnh đề đúng vì $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1 \neq -1$

d) Mọi số tự nhiên chẵn đều khác 3.

Mệnh đề đúng.

Bài 5. Xét các mệnh đề sau đúng hay sai và lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề.

a) P: $\exists x \in \mathbb{Q}: 4x^2 - 1 = 0$

b) Q: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \neq 0$

c) R: $\forall n \in \mathbb{N}: 2n \geq n$

d) S: $\exists n \in \mathbb{N}: n^2 \neq n$

Giải

a) P là mệnh đề đúng vì $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

$\overline{P}$: $\forall x \in \mathbb{Q}: 4x^2 - 1 \neq 0$.

b) Q là mệnh đề sai vì chẳng hạn $x = 0$. $\overline{Q}$: $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \neq 0$.

c) R là mệnh đề đúng. $\overline{R}$: $\exists n \in \mathbb{N}: 2n < n$

d) S là mệnh đề đúng. $\overline{S}$: $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 = n$.

Bài 6. Các mệnh đề sau đúng hay sai. Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

a) A: $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

b) B: $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 > n$.

c) C: $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 \neq 0$.

d) D: $\forall x \in \mathbb{R}: (x - 2)^2 \neq x - 2$

Giải

a) Ta sẽ chứng minh A là mệnh đề đúng.

+ $n = 3k; k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 1$, không chia hết cho 3.

+ $n = 3k + 1; k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 1 = 9k^2 + 6k + 2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, không chia hết cho 3.

+ $n = 3k + 2; k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 5 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 2$, không chia hết cho 3.

Vậy $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

b) Mệnh đề B là sai vì $\exists x = 1 \in \mathbb{R}: 1^2 > 1$ (sai)

Sửa lại: $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 \geq n$

c) Mệnh đề C là đúng.

d) Mệnh đề D là sai, vì chẳng hạn $\exists x = 2$ mà $(2 - 2)^2 = 2 - 2 = 0$.

Sửa lại: $\exists x \in \mathbb{R}: (x - 2)^2 \neq x - 2$.

Bài 7.

a) Viết dưới dạng "$P \Rightarrow Q$" của mệnh đề.

Vì 126 chia hết cho 3 nên 126 chia hết cho 9.

b) Cho hai mệnh đề P và Q: P: "40 chia hết cho 5".

Q: "40 chia hết cho 10".

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

c) Cho hai mệnh đề P và Q.

P: "5 là số nguyên tố".

Q: "4! + 1 chia hết cho 5".

Phát biểu mệnh đề P ⇒ Q. Cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

Giải

a) Nếu 126 chia hết cho 3 thì 126 chia hết cho 9.

b) Nếu 40 chia hết cho 5 thì 40 chia hết cho 10.

Mệnh đề này đúng.

c) Nếu 5 là số nguyên tố thì 4! + 1 chia hết cho 5.

Mệnh đề này đúng vì 5 là số nguyên tố và 4! + 1 = 1.2.3.4 + 1 = 25 chia hết cho 5.

Đó chính là trường hợp đặc biệt của định lý Wilson: "Nếu p là số nguyên tố thì (p – 1)! + 1 chia hết cho p". Ở đây với p =5.

Bài 8. Chứng minh các mệnh đề sau đây là đúng.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 - x + 1 > 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: n không chia hết cho 3: $n^2 - 1$ chia hết cho 3.

Giải

a) Ta có: $\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

vì $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$

b) • Nếu $n \in \mathbb{N}$: $n = 3k + 1$: $k \in \mathbb{N}$.

Ta có $n^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$

Số này luôn chia hết cho 3, $\forall kx \in \mathbb{N}$.

• Nếu $n \in \mathbb{N}$: $n = 3k + 2$; $k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $n^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$

Số này luôn chia hết cho 3: $\forall k \in \mathbb{N}$.

Bài 9. Cho hai mệnh đề P: "$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$"; Q: "$\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$"

Phát biểu mệnh đề P ⇔ Q. Cho biết mệnh đề đó đúng hay sai?

Giải

ΔABC bằng $\Delta A'B'C'$ nếu và chỉ nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với nhau.

Mệnh đề sai vì $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng, nhưng $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề sai.

Bài 10. Cho hai mệnh đề.

P: Tứ giác ABCD là hình thoi.

Q: Tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc.

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$.

Giải

Tứ giác ABCD là hình thoi nếu và chỉ nếu tứ giác ABCD là hình bình hành và có hai đường chéo vuông góc.

Bài 11. Phát biểu mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề sau và cho biết tính đúng sai của nó.

a) Tam giác ABC vuông tại A nên trung tuyến AB bằng nửa cạnh huyền BC.

b) Tứ giác ABCD là hình chữ nhật nên hai đường chéo bằng nhau.

Giải

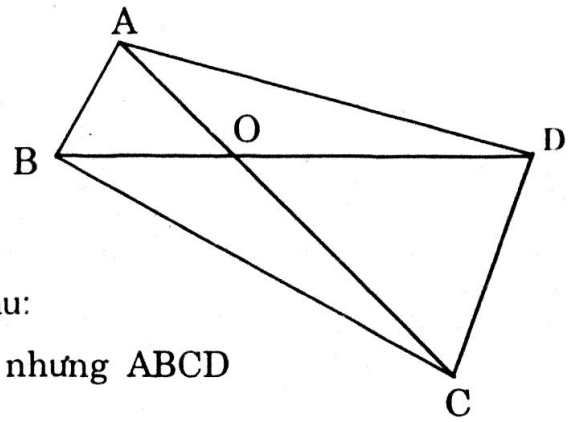
a) Mệnh đề đảo: Tam giác ABC có trung tuyến $AM = \frac{1}{2}BC$ thì tam giác ABC vuông tại A.

Mệnh đề này đúng.

b) Mệnh đề đảo: Tứ giác ABCD có hai đường chéo bằng nhau nên nó là hình chữ nhật.

Mệnh đề sai. Chẳng hạn hình vẽ sau:

$OA = OB$; $OC = OD \Rightarrow AC = BD$ nhưng ABCD không phải là hình chữ nhật.



§2. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Định lý: là một mệnh đề đúng. Nhiều định lý phát biểu dưới dạng:

  $\forall x \in X: P(x) \Rightarrow Q(x)$ (*)

  P(x); Q(x) là các mệnh đề chứa biến; X là tập hợp nào đó.
- Chứng minh định lý là dùng suy luận để, khẳng định
- Mệnh đề (*) là đúng: Với mọi x thuộc X mà P(x) đúng thì Q(x) đúng.
- Trong định lý (*):

  P(x) là điều kiện đủ để có Q(x) hoặc

  Q(x) là điều kiện cần để có P(x).
- Định lý: "$\forall x \in X: Q(x) \Rightarrow P(x)$". Đúng gọi là định lý đảo của định lý (*).
- $\forall x \in X: P(x) \Leftrightarrow Q(x)$. Ta nói: P(x) là điều kiện cần và đủ để có Q(x).
- Phép chứng minh phản chứng của (*):

  Giả sử $x_0 \in X$ sao cho P(x) đúng và Q(x) là sai.
- Dùng suy luận để đi đến một điều vô lý.

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu định lý sau:

a) Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.

b) Nếu tứ giác ABCD là hình thoi thì $AC \perp BD$.

c) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ thì phương trình có nghiệm.

Giải

a) Một số tự nhiên chia hết cho 3 là điều kiện cần để số đó chia hết cho 6.

b) Tứ giác ABCD có $AC \perp BD$ là điều kiện cần để tứ giác đó là hình thoi.

c) Điều kiện cần để phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ là phương trình phải có nghiệm.

Bài 2. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu định lý sau:

a) Nếu một số tự nhiên là số lẻ thì $n^2 - 1$ chia hết cho 4.

b) Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

c) Nếu số tự nhiên n có n^2 chia hết cho 3 thì n chia hết cho 3.

Giải

a) Số tự nhiên n là số lẻ là điều kiện đủ để $n^2 - 1$ chia hết cho 4.

b) Tứ giác ABCD là hình bình hành là điều kiện đủ để hai đường chéo của nó cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

c) Số tự nhiên n có n^2 chia hết cho 3 là điều kiện đủ để n chia hết cho 3.

Bài 3. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lý sau:

a) Số tự nhiên có n có tổng các chữ số chia hết cho 3 khi và chỉ khi n chia hết cho 3.

b) Hình bình hành ABCD là hình thoi khi và chỉ khi hai đường chéo vuông góc.

c) Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm bằng 1 thì $a + b + c = 0$ và ngược lại.

Giải

a) Điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 3 là tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.

b) Điều kiện cần và đủ để hình bình hành ABCD là hình thoi là hai đường chéo vuông góc.

c) Điều kiện cần và đủ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm bằng 1 là $a + b + c = 0$.

Bài 4. Sửa lại (nếu cần) các mệnh đề sau để được mệnh đề đúng.

a) Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình thoi là bốn cạnh của nó bằng nhau.

b) $a + b > 0$ khi và chỉ khi có ít nhất một trong hai số a; b là số dương.

c) Số tự nhiên n chia hết cho 5 là điều kiện đủ để nó có tận cùng bằng 5.

Giải

a) Mệnh đề đã cho là đúng.

b) Nếu $a + b > 0$ thì có ít nhất một trong hai số là dương. Vì nếu $a \leq 0$ và $b \leq 0$ thì $a + b \leq 0$.

c) Số tự nhiên n có tận cùng bằng 5 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 5.

Bài 5. Chứng minh các định lý sau bằng phản chứng.

a) Nếu $a + b < 4$ thì một trong hai số nhỏ hơn 2.

b) Nếu n là số tự nhiên và n^2 chia hết cho 3 thì n chia hết chia 3.

c) Nếu $|a| < 1$ và $|b| < 1$ thì $|a + b| < |1 + ab|$

Giải

a) Giả sử $a \geq 2$ và $b \geq 2 \Rightarrow a + b \geq 4$. Trái giả thiết.

Vậy $a < 2$ hoặc $b < 2$.

b) Giả sử n không chia hết cho 3.

+ Nếu n chia cho 3 dư 1: $n = 3k + 1$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 \Rightarrow n^2$ không chia hết cho 3. Trái giả thiết.

+ Nếu n chia hết cho 3 dư 2: $n = 3k + 2$ $(k \in Z)$

$\Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \Rightarrow n^2$ không chia hết cho 3. Trái giả thiết.

Vậy n chia hết cho 3.

c) Giả sử $|a + b| \geq |1 + ab| \Rightarrow (a + b)^2 \geq (1 + ab)^2$

$\Rightarrow (a^2 + 2ab + b^2 \geq 1 + 2ab + a^2b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 1 - a^2b^2 \geq 0$

$\Rightarrow (a^2 - 1)(1 - b^2) \geq 0$ (1)

Vì $|a| < 1$ và $|b| < 1 \Rightarrow a^2 < 1$ và $b^2 < 1$

$\Rightarrow a^2 - 1 < 0$ và $1 - b^2 > 0 \Rightarrow (a^2 - 1)(1 - b^2) < 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta được điều vô lý.

Vậy $|a + b| < |1 + ab|$.

§3. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

$A = B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \end{array}\right.$$

Khi $A \subset B$ thì $A \setminus B$ gọi là phần bù của B trong A và kí hiệu C_AB.

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Viết mỗi tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \le n^2 \le 20\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{Q} / (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1) = 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 - x - 1)(x^2 - 3) = 0\}$

Giải

a) $A = \{1; 2; 3; 4\}$ b) $B = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$ c) $C = \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Bài 2. Viết các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng các phần tử của nó.

a) $A = \{0; 3; 6; 9\}$ b) $B = \{0; 1; 4; 9\}$ c) $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

Giải

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / x = 3k; k \in \mathbb{N}; x < 10\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} / x = n^2; n \in \mathbb{N}; x < 10\}$

c) $C = \{n \in \mathbb{N} / n = 2k + 1; k \in \mathbb{N}; n < 10\}$

Bài 3. Cho $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$; $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Xác định các tập $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$?

Giải

$A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$

$A \cap B = \{0; 2; 4; 6; 8;\}$

$A \setminus B = \{10\}$

$B \setminus A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

Bài 4. Xác định tất cả các tập con của tập $A = \{a; b; c\}$.

Giải

$\emptyset$; A; {a}; {b}; {c}; {a; b}; {b; c}; {c; a}.

Bài 5. $A = \{a; b; c; d; e\}$; $B = \{a; c; e\}$; $C = \{c; d; e; f; g\}$

Xác định tập $A \cap (B \cup C)$; $A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cap C$

Giải

- $B \cup C = \{a; c; d; e; f; g\}$

$A \cap (B \cup C) = \{a; c; d; e\}$

• $B \cap C = \{c; e\}$

$A \cap (B \cap C) = \{c; e\}$

• $A \cup B = \{a; b; c; d; e\}$

$(A \cup B) \cap C = \{c; d; e\}$

Bài 6. Cho $A = (-2; 0]$; $B = [0; 2)$

Xác định tập $A \cup B$; $A \cap B$; $C_{\mathbb{R}}A$?

Giải

$A \cup B = (-2; 2)$

$A \cap B = \{0\}$

$C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -2] \cup (0 ; +\infty)$

Bài 7. Cho $A = [x; x + 1]$; $B = [2; 5]$

a) Tìm x để $A \cap B \subset B$. b) Tìm x để $A \cap B \subset A$.

c) Tìm x để $A \cap B \neq \emptyset$.

Giải

a) $A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x + 1 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 4$

b) $B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \geq x \\ 5 \leq x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 4 \end{cases}$ (vô nghiệm)

c) $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 2 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5.$

Bài 8. Cho $A = (-\infty; x]$; $B = [2; +\infty)$. Xác định x để $A \cap B \neq \emptyset$; $A \cap B = \emptyset$.

Giải

+ $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow x \geq 2$

+ $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow x < 2$

Bài 9. Cho $A = (x; x + 2)$; $B = (2; 5)$

Tìm x để $A \cup B$ là một khoảng.

Giải

+ $A \cap B \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 > 2 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 5.$

Bài 10. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 1| > 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / |x + 1| < 5\}$

Tìm tập $A \cap B$

Giải

$$x \in A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - 1 > 2 \\ x - 1 < -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 3 \\ x < -1 \end{bmatrix}$$

$A = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

$$x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 < 5 \\ x + 1 > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 < x < 4$$

$B = (-6; 4)$

Vậy $A \cap B = (-6; -1) \cup (3; 4)$

Bài 11. Cho $A = \{x \in \mathbb{R} / 1 \le |x| \le 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / 2 \le |x| \le 4\}$

Tìm tập hợp $A \cup B$; $A \cap B$

Giải

$x \in A \Rightarrow 1 \le |x| \le 3$

Nếu $x \ge 0$: $1 \le x \le 3$

Nếu $x < 0$: $1 \le -x \le 3 \Rightarrow -3 \le x \le -1$

Vậy $A = [-3; -1] \cup [1; 3]$

Tương tự: $B = [-4; -2] \cup [2; 4]$

Ta có: $A \cup B = [-4; -1] \cup [1; 4]$

$A \cap B = [-3; -2] \cup [2; 3]$

Bài 12. Chứng minh rằng: a) Nếu $A \cup B = B$ thì $A \subset B$

b) Nếu $A \setminus B = A$ thì $A \cap B = \emptyset$

c) Nếu $A \cap B = B$ thì $B \subset A$

Giải

a) Lấy x tùy ý; $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$, mà $A \cup B = B \Rightarrow x \in B$.

Vậy $A \subset B$.

b) Giả sử $A \cap B \ne \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in A$ và $x_0 \in B$ (1)

Theo giả thiết $A = A \setminus B$, với $x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \setminus B$

$\Rightarrow x_0 \in A$ và $x_0 \notin B$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra điều vô lý. Vậy $A \cap B = \emptyset$.

c) Lấy x tùy ý: $x \in B$, vì $B = A \cap B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in B$ và $x \in A \Rightarrow x \in A$. Vậy $B \subset C$

§4. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Cho $\bar{a}$ là giá trị đúng, a là giá trị gần đúng của $\bar{a}$. Giá trị $\Delta_a = |\bar{a} - a|$, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a. Khi viết $\bar{a} = a = \pm d$, ta hiểu số đúng nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$. Người ta gọi d là độ chính xác của số gần đúng a.
- Tỷ số $\delta_a = \dfrac{|\bar{a} - a|}{|a|}$, kí hiệu là δ_a, được gọi là sai số tương đối của số gần đúng a (thường được nhân với 100% để viết dưới dạng phần trăm).
- Khi thay số đúng bởi số quy tròn thì sai số tuyệt đối không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn.
- Xét số gần đúng a của số đúng $\bar{a}$. Với độ chính xác d. Trong số a một chữ số gọi là chữ số chắc nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

  + Nếu a là số thập phân không nguyên, được viết dưới dạng chuẩn mà có k chữ số ở phần thập phân thì sai số tuyệt đối của a không vượt quá $\dfrac{1}{2}10^{-k}$, nghĩa là

$$a - \frac{1}{2}10^{-k} \le \bar{a} \le a + \frac{1}{2}10^{-k}.$$

  + Nếu a là số nguyên được viết dưới dạng chuẩn $a = A.10^k$ với $A \in \mathbb{Z}$ và $k \in \mathbb{N}$ thì sai số tuyệt đối của a không vượt quá $\dfrac{1}{2}10^k$, nghĩa là $a - \dfrac{1}{2}10^k \le \bar{a} \le a + \dfrac{1}{2}10^k$.

  – Sai số tuyệt đối của tổng hay hiệu các số gần đúng không vượt quá tổng các sai số tuyệt đối.

– Sai số tương đối của tích hay thương của các số gần đúng không vượt quá tổng các sai số tương đối.

II/ BÀI TẬP

Bài 1.

a) Chứng tỏ rằng sai số tuyệt đối của 1,42 so với $\sqrt{2}$ nhỏ hơn 0,01.

b) Tương tự sai số tuyệt đối của 0,429 so với $\frac{3}{7}$ nhỏ hơn 0,005.

Giải

a) Ta có:

$\sqrt{2} \approx 1,41$

Vậy $|\sqrt{2} - 1,42| < 1,42 - 1,41 < 0,01$.

b) Ta có: $\frac{3}{7} \approx 0,4286$

Vậy $\left|\frac{3}{7} - 0,429\right| < |0,4286 - 0,429| < 0,005$

Bài 2. Cho hai giá trị gần đúng của π là 3,14 và 3,1416. Đánh giá sai số tuyệt đối.

Giải

- Ta có: $|\pi - 3,14| < |3,141592654 - 3,14| < 0,002$.
- $|\pi - 3,1416| < |3,141592654 - 3,1416| < 0,00001$.

Bài 3.

a) Cho số x = 1356,5 (±0,1)

Hãy viết số quy tròn của x.

b) Cho số y = 1357,25 (±0,01). Hãy viết số quy tròn của số y.

Giải

a) $x \approx 1357$. b) $y \approx 1357,3$.

Bài 4. Một hình chữ nhật có các cạnh

x = 4,2m ± 1cm; y = 7m ± 2cm

Chứng minh rằng chu vi P của hình chữ nhật là P = 22,4m ± 6cm.

Giải

Ta có: P = x + x + y + y = 4,2 + 4,2 + 7 + 7 = 22,4cm.

Lại có: 1 +1 + 2 + 2 = 6cm. Vậy P = 22,4m ± 6cm.

Bài 5. Cho ta giác ABC vuông tại A, có AB = 12,10 ± 0,01 (cm)

AC = 25,21 ± 0,01 (cm)

Chứng minh rằng tanC ≈ 0,480

Giải

$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{12,10}{25,21} = 0,479 \approx 0,480.$$

Bài 6. Một hình hộp chữ nhật có kích thước x = 3m ± 1cm; y = 5m ± 2cm z = 4m ± 2cm.

Xác định thể tích V của hình hộp chữ nhật, sai số tương đối, sai s tuyệt đối, chữ số chắc của kết quả.

Giải

Ta có: V = xyz = 3.5.4 = 60 (cm^3)

$$\delta_x = \frac{1}{300}; \delta_y = \frac{2}{500}; \delta_z = \frac{2}{400}$$

$$\Rightarrow \delta_v = \frac{1}{300} + \frac{2}{500} + \frac{2}{400} \approx 1,2\%. \text{ Vậy } \Delta_v = \delta_v.V = 1,2\%.60 = 0,72 < 1$$

Kết quả có 2 chữ số chắc.

Bài 7. Sử dụng máy tính bỏ túi.

Hãy viết $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần trăm; hàng phần nghìn.

Giải

Ta có $\sqrt{3}$ = 1,732050808...

Vậy lấy $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng trăm là 1,73; lấy chính xác đến hàn phần nghìn là 1,732.

Bài 8. Dân số của một tỉnh là 2731425 người ± 200 người. Hỏi những chữ số nào là chữ số chắc.

Giải

Ta có: $\frac{100}{2} = 50 < 200 < \frac{1000}{2}$

Vậy những chữ số chắc là 2; 7; 3; 1.

Bài 9. Sử dụng máy tính bỏ túi hãy thực hiện phép tính sau:

a) $3\sqrt{2}$ (chính xác đến hàng phần trăm)

b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$ (làm tròn kết quả đến 4 chữ số ở phần thập phân).

Giải

a) $3\sqrt{2} \approx 4,24$.

b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{5} \approx 0,2520$.

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Cho các câu sau:

a) $\sqrt{5}$ là số hữu tỷ

b) $x + 3 = \sqrt{2}$

c) $\pi < 3,142$

d) 61 là số nguyên tố

e) $10! + 1$ chia hết cho 11.

f) Phương trình $x^2 - 3x + 3 = 0$ có nghiệm.

Số câu là mệnh đề trong các câu trên là:

A. 2 B. 3 C. 4 D.5

2. Cho mệnh đề: $P : \forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 7 > 0$

Mệnh đề phủ định $\overline{P}$ là:

A. "$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 7 < 0$" B. "$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 7 \leq 0$"

C. "$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 7 < 0$" D. "$\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 7 \leq 0$"

3. Cho mệnh đề P: "$\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ chia hết cho 3".

Mệnh đề phủ định $\overline{P}$ là:

A. "$\forall n \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ không chia hết cho 3"

B. "$\exists n \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ chia hết cho 3"

C. "$\exists n \in \mathbb{N}: n^2 + 1$ không chia hết cho 3"

D. "$\exists n \in \mathbb{R}: n^2 + 1 \neq 3$".

4. Mệnh đề nào sau đây là đúng.

A. $\forall x \in \mathbb{R}: x > -1 \Rightarrow x^2 > 1$ B. $\forall x \in \mathbb{R}: x > 1 \Rightarrow x^2 > 1$

C. $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 1 \Rightarrow x > 1$ D. $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 > 1 \Rightarrow x > -1$

5. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào không là định lý:

A. $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$ B. $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 \vdots 7 \Rightarrow n \vdots 7$

C. $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 \vdots 4 \Rightarrow n \vdots 4$ D. $\forall n \in \mathbb{N}: n^2 \vdots 6 \Rightarrow n \vdots 6$

6. Cho M = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 9}; N = {0; 2; 4; 6; 8;9}; P = {3; 4; 5; 6; 7

Tập M ∩ (N \ P) là:

A. {0; 3; 9} B. {0; 5; 9} C. {0; 2; 9} D. {0; 2; 7}

7. Viết gần đúng của $\sqrt{3}$ theo quy tắc làm tròn đến 4 chữ số ở phần thậ phân. Tính sai số tuyệt đối.

A. 1,7321 Δ = 0,001 B. 1,7320 Δ = 0,001

C. 1,7321 Δ = 0,0001 D. 1,7320 Δ = 0,0001

8. Dân số của một tỉnh là 1.379425 ± 300 (người)

Các chữ số nào là chữ số chắc:

A. 1, 3, 7, 9. B. 1, 3, 7, 9, 4.

C. 1, 3, 7, 9, 4, 2. D. 1, 3, 7.

Đáp án

1. B **2.** D **3.**C **4.** B **5.**C **6.**C **7.** C **8.**A.

Chương II.
HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Cho một tập hợp khác rỗng D ⊂ ℝ.

  Hàm số f xác định trên D là một quy tắc đặt tương ứng mỗi số thuộc D với một và chỉ một số, kí hiệu là f(x); số f(x) đó gọi là giá t hàm số f tại x.

  Tập D gọi là tập xác định (hay miền xác định), x gọi là biến số hà đối số của hàm số f.

- Tập xác định của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các số thực x sa cho giá trị của biểu thức f(x) được xác định.
- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp (G) các điểm $(x_0; f(x_0)$ với $x_0 \in D$ g là đồ thị của hàm số y = f(x).
- Cho hàm số f xác định trên K.

Hàm số f gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Hàm số f gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Chú ý:

Hàm số f đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2,\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0.$$

Hàm số f nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 \neq x_2,\ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0.$$

- Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D.

  Hàm số f gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D, ta có $-x$ cũng thuộc D và $f(-x) = f(x)$.

  Hàm số f gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D, ta có $-x$ cũng thuộc D và $f(-x) = -f(x)$.

  Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm tâm đối xứng.

  Đồ thị của hàm số lẻ gốc tọa độ làm trục đối xứng.

I BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \dfrac{2x+3}{x^2 - x + 1}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x}$ c) $y = \dfrac{x+3}{x^2 - 3x + 2}$ d) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$

Giải

a) Điều kiện: $x^2 - x + 1 \neq 0$. Vì phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm nên $x^2 - x + 1 \neq 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

b) Điều kiện: $x \neq 0$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

c) Điều kiện: $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) Điều kiện: $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Tập xác định: $D = (-1; +\infty)$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+2} & \text{với } x \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-2x}}{x-1} & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính f(0); f(2); f(−1); $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; f(−2)

Giải

a) Tập xác định của hàm số: $D = [-1; 0) \cup [0; +\infty) = [-1; +\infty)$

b) $f(0) = \dfrac{2.0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$

$f(2) = \dfrac{2.2+1}{2+2} = \dfrac{5}{4}$

$f(-1) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

f(−2) không xác định được vì trí $-2 \notin D$

Bài 3. Tìm hàm số f(x), biết

a) $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$; b) $f(x - 1) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; $x \geq 3$

c) $f\left(x + \dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ $x \neq 0$

Giải

a) Đặt $t = x + 1 \Rightarrow x = t - 1$

Ta có: $f(t) = (t - 1)^2 - 3(t - 1) + 2 \Leftrightarrow f(t) = t^2 - 5t + 6$

Vậy: $f(x) = x^2 - 5x + 6$

b) Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$

Ta có: $f(t) = \sqrt{(t+1)^2 - 4(t+1) + 3} \Leftrightarrow f(t) = \sqrt{t^2 - 2t}$

Vậy: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

c) Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Ta có: $f(t) = t^2 - 2$

Vậy $f(x) = x^2 - 2$

Bài 4. Chứng minh rằng các hàm số sau đồng biến trên khoảng đã chỉ ra:

a) $y = f(x) = x^2 - 2x$; $(1; +\infty)$ b) $y = f(x) = x^3$; $(-\infty; +\infty)$

c) $y = f(x) = \sqrt{x}$; $(0; +\infty)$

Giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in (1; +\infty)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 - 2x_2) - (x_1^2 - 2x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)}{x_2 - x_1}$

$= x_2 + x_1 - 2$

Vì $x_1, x_2 \in (1; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x_2 > 1 \\ x_1 > 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 + x_1 > 2 \Rightarrow x_2 + x_1 - 2 > 0$

Vậy $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$

b) Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2$

$= \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2\right] > 0$

Vậy hàm số đồng biến trên R

c) Với mọi $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)\left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)}$

$= \frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0$

Vậy hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Bài 5. Chứng minh rằng các hàm số sau nghịch biến trên khoảng đã chỉ ra:

a) $y = f(x) = \dfrac{1}{x-2}$; $(2; +\infty)$ b) $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$; $(-\infty; 3)$

c) $y = f(x) = \sqrt{4-x}$; $(-\infty; 4)$

Giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in (2; +\infty)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\dfrac{1}{x_2 - 2} - \dfrac{1}{x_1 - 2}}{x_2 - x_1} = -\dfrac{1}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)}$

Vì $x_1; x_2 \in (2; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 > 0 \\ x_2 - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{-1}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)} < 0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$

b) Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 3)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\left(x_2^2 - 6x_2 + 5\right) - \left(x_1^2 - 6x_1 + 5\right)}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{x_2^2 - x_1^2 - 6(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 6$

Vì $x_1; x_2 \in (-\infty; 3) \Rightarrow \begin{cases} x_1 < 3 \\ x_2 < 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 6 \Rightarrow x_1 + x_2 - 6 < 0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 3)$

c) Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 4)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\sqrt{4 - x_2} - \sqrt{4 - x_1}}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{(4 - x_2) - (4 - x_1)}{(x_2 - x_1)\left(\sqrt{4 - x_2} + \sqrt{4 - x_1}\right)} = \dfrac{-1}{\sqrt{4 - x_2} + \sqrt{4 - x_1}} < 0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 4)$

Bài 6. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số

a) $y = f(x) = x\sqrt{x}$ b) $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$

Giải

a) Tập xác định: $D = [0; +\infty)$

Ta sẽ chứng minh hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$

Với mọi $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\left(\sqrt{x_2}\right)^3 - \left(\sqrt{x_1}\right)^3}{x_2 - x_1}$

$= \dfrac{\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right)\left(x_2 + x_1 + \sqrt{x_1 x_2}\right)}{x_2 - x_1} = \dfrac{x_2 + x_1 + \sqrt{x_1 x_2}}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} > 0$

vì $x_1 > 0$ và $x_2 > 0$

b) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$

Xét khoảng $(a; b) \subset \mathbb{R}$

Với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{\left(x_2^2 - 2x_2 + 3\right) - \left(x_1^2 - 2x_1 + 3\right)}{x_2 - x_1}$

$= x_1 + x_2 - 2$

Lấy $(1; +\infty)$, vì $x_1; x_2 \in (1; +\infty) \Rightarrow x_1 > 1$ và $x_2 > 1$

$\Rightarrow x_1 + x_2 > 2 \Rightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0$

Vậy trên $(1; +\infty)$: hàm số đồng biến.

Tương tự: $(-\infty; 1)$: hàm số nghịch biến.

Bài 7. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = |x|$ b) $y = f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

Giải

a) Ta có: $y = f(x) = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

- Xét khoảng $(0; +\infty)$

Với mọi $x_1; x_2 \in (0; +\infty)$ $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1 > 0$

Vậy trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số đồng biến

Chứng minh tương tự: trên khoảng $(-\infty; 0)$ hàm số nghịch biến.

b) Tập xác định: $D = (-\infty; 1)$

Với mọi $x_1; x_2 \in D$ $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x_2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x_1}}\right).\dfrac{1}{x_2-x_1}$

$= \dfrac{\sqrt{1-x_1}-\sqrt{1-x_2}}{\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-x_1}}.\dfrac{1}{x_2-x_1} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x_2}\sqrt{1-x_1}\left(\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}\right)} > 0$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$

Bài 8. Chứng minh các hàm số sau đây là chẵn.

a) $y = f(x) = |x|$ b) $y = f(x) = |x-2| + |x+2|$

c) $y = f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ d) $y = f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2+1}$

Giải

a) • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có: $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

Vậy hàm số là chẵn.

b) • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có: $f(-x) = |-x-2| + |-x+2| = |x+2| + |x-2| = f(x)$

Vậy hàm số là chẵn.

c) Điều kiện: $\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases}$

• Tập xác định: $D = [-1; 1]$

• Với $x \in [-1; 1]$

+ Nếu $x \in (0; 1] \Rightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow 0 > -x \geq -1 \Rightarrow -x \in [-1; 1]$

($x \in [-1; 0)$. Chứng minh tương tự: $-x \in [-1; 1]$ và $x = 0 \Rightarrow -x \in [-1; 1]$)

• $\forall x \in [-1; 1]$. Ta có:

$f(-x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{3+x} + \sqrt{(x)^2+1} = \sqrt{3+x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2+1} = f(x)$

Vậy hàm số là chẵn.

Bài 9. Chứng minh các hàm số sau đây là lẻ.

a) $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; b) $y = f(x) = |x - 2| - |x + 2|$; c) $y = x|x|$

Giải

a) • Tập xác định: $D = \mathbb{R} = \setminus \{-1; 1\}$

• $\forall x \in D \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow -x \neq \pm 1 \Rightarrow -x \in D$

• $\forall x \in D$, ta có:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

Vậy hàm số là lẻ.

b) • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$f(-x) = |-x - 2| - |-x + 2| = |x + 2| - |x - 2| = -(|x - 2| - |x + 2|) = -f(x)$

Vậy hàm số là lẻ.

c) • Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có

$$f(-x) = (-x)\,|-x| = -(x|x|) = -f(x)$$

Vậy hàm số là lẻ.

Bài 10. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau đây:

a) $y = f(x) = \sqrt{4 - x}$; b) $y = f(x) = 2x^2 + 5x + 3$; c) $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 2x}$

Giải

a) Tập xác định: $D = (-\infty; 4]$

Ta thấy $\exists x_0 \in D$, $x_0 = -5 \Rightarrow -x_0 = 5 \notin D$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta thấy: $\exists x_0 = 1 \in D$

$f(1) = 10$; $f(-1) = 0$ và $f(1) \neq \pm f(-1)$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$

Ta thấy: $\exists x_0 = -2 \in D$ nhưng $-x_0 = 2 \notin D$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

Bài 11. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 0$ b) $y = f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x > 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ -1 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

Giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = 0$; $f(x) = 0 \Rightarrow f(-x) = \pm f(x)$

Vậy hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

b) Tập xác định: $D = (-\infty; 0) \cup \{0\} \cup (0; +\infty) = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ mà $x > 0 \Rightarrow -x < 0$. Ta có

$f(-x) = -1 = -f(x)$

+ Tương tự: $x < 0$, ta cũng có: $f(-x) = -f(x)$

+ $x = 0$: $f(-x) = f(x) = 0$

Vậy hàm số là lẻ

Bài 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng có thể biểu diễn $f(x)$ dưới dạng:

$f(x) = g(x) + h(x)$, trong đó $g(x)$ là hàm số chẵn; $h(x)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Giải

Giả sử $f(x) = g(x) + h(x)$ (1), xác định trên $\mathbb{R}$.

Xét $f(-x) = g(-x) + h(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Vì $g(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow g(-x) = g(x)$

$h(x)$ là hàm số lẻ $\Rightarrow h(-x) = -h(x)$

Vậy: $f(-x) = g(x) - h(x)$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(x) = g(x) - h(x) \end{cases}$

Cộng vế với vế, ta được: $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

Tương tự: $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

Ta sẽ chứng minh g(x) là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}: g(-x) = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2}$

$\Rightarrow g(-x) = g(x)$. Vậy g(x) là hàm số chẵn.

Tương tự: h(x) là hàm số lẻ.

Ta có ngay $f(x) = g(x) + h(x)$

Bài 13. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và là các hàm số chẵn thì hàm số $f(x) + g(x)$ và $f(x) - g(x)$ là các hàm số chẵn.

Giải

+ Tập xác định của $f(x) + g(x)$ là $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$ (vì f(x); g(x) là các hàm số chẵn).

Vậy $f(x) + g(x)$ là hàm số chẵn.

+ Tập xác định của $f(x) - g(x)$ là $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x)$ (vì f(x) và g(x) là các hàm số chẵn).

Vậy $f(x) - g(x)$ là hàm số chẵn.

Bài 14. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và là các hàm số lẻ.

Chứng minh hàm $f(x) - g(x)$ là hàm số lẻ; $f(x).g(x)$ là hàm số chẵn.

Giải

+ Tập xác định của f(x) – g(x) là $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$f(-x) - g(-x) = -f(x) + g(x) = -[f(x) - g(x)]$

Vậy f(x).g(x) là hàm số lẻ.

+ Tập xác định của f(x).g(x) là $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$f(-x) - g(-x) = [-f(x)].[-g(x)] = f(x).g(x)$

Vậy hàm số f(x).g(x) là hàm số chẵn.

Bạn đọc còn có thể thấy rằng nếu f(x); g(x) xác định trên $\mathbb{R}$ và $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$; f(x) là hàm số chẵn, g(x) là hàm số lẻ thì: $\frac{f(x)}{g(x)}$ là hàm số lẻ...

Bài 15. Cho hàm số y = f(x) là lẻ trên $\mathbb{R}$.

Chứng minh hàm số |f(x)| là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

Giải

Tập xác định của hàm |f(x)| là $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$: $|f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)|$

Vậy |f(x)| là hàm số chẵn.

Bài 16. Biểu diễn các hàm số sau đây thành tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

a) $y = f(x) = \sqrt{x+3}$ $\forall x \in [-3; 3]$ b) $y = f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

Giải

a) Theo bài 12, với $f(x) = \sqrt{x+3}$, ta có:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2};\ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Vậy $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} + \sqrt{3-x}}{2};\ h(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}}{2}$

ở đó g(x) là hàm số chẵn; h(x) là hàm số lẻ. (xin bạn tự chứng minh).

b) Tương tự: f(x) = g(x) + h(x); ở đó

$g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1};\ h(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ và g(x) là hàm số lẻ; h(x) là hàm số chẵn trên tập xác định chung. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Bài 17. Cho hàm số f(t) xác định trên $\mathbb{R}$ và $f(t) \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: f(x + y) + f(x - y) = 2f(x).f(y)$$

a) Tính f(0)

b) Chứng minh f(t) là hàm số chẵn.

Giải

a) Ta có với x = 0; y = 0; f(0) + f(0) = 2f(0).f(0)

$\Rightarrow [f(x)]^2 - f(0) = 0 \Rightarrow f(0).[f(0) - 1] = 0 \Rightarrow f(0) = 1$ (vì $f(0) \neq 0$)

b) $\forall y \in \mathbb{R}$; x = 0, ta có:

$$f(y) + f(-y) = 2f(0).f(y)$$

mà f(0) = 1, nên:

$$f(y) + f(-y) = 2f(y) \Rightarrow f(-y) = f(y)$$

Vậy $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-t) = f(t) \Rightarrow f(t)$ là hàm số chẵn.

Bài 18. Cho hàm số f(t) xác định trên $\mathbb{R}$ và $\forall x, y \in \mathbb{R}$: f(x + y) = f(x) + f(y).

a) Tính f(0).

b) Chứng minh f(t) là hàm số lẻ.

Giải

a) Cho x = y = 0, ta có:

$$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$; cho y = −x, ta có:

$$f(x - x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(0) = f(x) + f(-x)$$

mà $f(0) = 0 \Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

Vậy f(t) là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.

Bài 19. a) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = x^2 + 4x - 5$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = -2$.

b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số $y = \dfrac{1}{x-1}$ có tâm đối xứng là điểm I(1; 0)

Giải

a) Đặt $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 2 \\ y = Y \end{cases}$

Khi đó, ta có: $Y = (X - 2)^2 + 4(X - 2) - 5$

$\Leftrightarrow Y = X^2 - 9$

Ta sẽ chứng minh hàm số $Y = F(x) = X^2 - 9$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

$\forall X \in \mathbb{R} \Rightarrow -X \in \mathbb{R}$

$\forall X \in \mathbb{R}$: $F(-X) = (-X)^2 - 9 = X^2 - 9 = F(X)$

Vậy F(X) là hàm số chẵn, do đó đồ thị (P) trong hệ trục IXY nhân trục tung là trục đối xứng.

Phương trình của trục tung IY là $X = 0$

Chuyển về hệ trục tọa độ Oxy: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy $x = -2$ là trục đối xứng của đồ thị (P) hàm số $y = x^2 + 4x - 5$.

b) Đặt $\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$

Khi đó, ta có: $Y = \dfrac{1}{X + 1 - 1} = \dfrac{1}{X}$

Dễ thấy hàm số $Y = \dfrac{1}{X}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ và là hàm số lẻ, nên đồ thị (H) của nó trong hệ trục tọa độ IXY, có tâm đối xứng là gốc tọa độ I.

Vậy I(1; 0) là tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho.

Bài 20. a) Tìm tâm đối xứng của đồ thị (H) của hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$.

b) Tìm trục đối xứng của đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 2x + 3$

Giải

a) Ta có: $y = 2 - \dfrac{3}{x+1} \Leftrightarrow y - 2 = -\dfrac{3}{x+1}$

Xét điểm I(−1; 2)

Đặt $\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$

Trong hệ trục tọa độ IXY, ta có:

$Y = \dfrac{-3}{X}$. Dễ thấy hàm số $Y = \dfrac{-3}{X}$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nên đồ thị (H) của nó đối xứng qua gốc tọa độ. I trong hệ trục tọa độ IXY

Vậy I là tâm đối xứng của (H) và I(−1; 2).

b) Ta có: $y = (x - 1)^2 + 2$

Xét điểm I(1; 0). Dùng phép tịnh tiến sang phải một đơn vị. Ta đặt

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ IXY, ta có:

$$Y = X^2 + 2.$$

Hàm số này là chẵn trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị (P) của nó nhận trục tung IY là trục đối xứng.

Phương trình của IY là $X = 0 \Rightarrow x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$ là trục đối xứng của (P).

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$; $a \neq 0$
- Khi $a > 0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Khi $a < 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là đường thẳng có hệ số gó bằng a.
- Cho hai đường thẳng (d): $y = ax + b$ và (d'): $y = a'x + b'$, ta có:

  (d) song song với (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$;

  (d) trùng với (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$;

  (d) cắt (d') $\Leftrightarrow a \neq a'$.

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Tìm giá trị của m sao cho cho đồ thị của hàm số:

$$y = 2mx + m + 1.$$

a) Đi qua điểm A(1; 2).

b) Song song với đường thẳng $y = 4x$.

c) Đi qua gốc tọa độ.

Giải

a) Điểm A(1; 2) thuộc đồ thị $\Rightarrow 2 = 2m.1 + m + 1 \Rightarrow 3m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$

b) Đồ thị song song với đường thẳng $y - 4x$ nên hệ số góc của chúr bằng $\Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$.

c) Điểm O(0; 0) thuộc đồ thị $\Rightarrow 0 = 2m.0 + m + 1 \Rightarrow m = -1$.

Bài 2.

a) Tìm hàm số $y = f(x)$; biết rằng đồ thị của nó là đường thẳng đi qu điểm A(1; 5) và có hệ số góc bằng 3.

b) Tìm hàm số $y = f(x)$; biết rằng đồ thị của nó là đường thẳng qua h điểm A(1; 2) và B(2; −1)

Giải

a) Phương trình đường thẳng có dạng: $y = 3x + b$

Điểm A thuộc đường thẳng này $\Rightarrow 5 = 3.1 + b \Rightarrow b = 2$

Vậy: $y = 3x + 2$

b) Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$

$$A \in (\Delta) \Rightarrow 2 = a.1 + b \Rightarrow a + b = 2 \qquad (1)$$

$$B \in (\Delta) \Rightarrow -1 = a.2 + 2a + b = -1 \Rightarrow 2a + b = -1 \qquad (2)$$

Giải hệ (1), (2), ta có: $a = -3$; $b = 5$

Vậy $y = -3x + 5$

Bài 3. a) Tìm m để hai đường thẳng $y = x - 1$ và $2x - my - 2m - 2 = 0$ cắt nhau tại một điểm trên Oy.

b) Tìm m để ba đường thẳng $x + y - 4 = 0$; $2x - 3y - 3 = 0$ và $mx - 2my + m + 5 = 0$ đồng quy.

Giải

a) Trước hết, ta thấy đường thẳng $y = x - 1$ cắt trục tung tại điểm A(0; –1).

Điểm A thuộc đường thẳng $2x - my - 2m - 2 = 0$

$\Rightarrow m - 2m - 2 = 0 \Rightarrow m = -2$.

b) Tọa độ giao điểm M (nếu có) của hai đường thẳng đầu tiên thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy M(3; 1)

M thuộc đường thẳng $mx - 2my + m + 5 = 0$

$$\Rightarrow 3m - 2m + m + 5 = 0 \Rightarrow 2m = -5 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

Vậy $m = -\frac{5}{2}$, ba đường thẳng đã cho đồng quy tại M.

Bài 4. a) Chứng minh rằng đường thẳng $y = mx + 2m + 3$ (dm) luôn luôn đi qua điểm cố định, khi m thay đổi.

b) Tương tự, với đường thẳng $(2m + 1)x + my = 3$ (dm)

Giải

a) Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ đường thẳng (dm) luôn đi qua, khi m thay đổi, ta có:

$$y_0 = mx_0 + 2m + 3, \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(x_0 + 2) + 3 - y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

Ta thấy M(–2; 3) thỏa mãn phương trình của (dm) $\Rightarrow$ M là điểm cố định cần tìm.

Có thể lấy m = 1; m = –1, ta có hai đường thẳng

(d_1): $y = x + 5$; (d_{-1}): $y = -x + 1$

(d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm M(–2; 3)

Ta chứng minh M ∈ (dm): ∀m. Thật vậy: 3 = m.(–2) + 2m + 3 (luôn đúng).

b) Đáp số: Điểm cố định mà (dm) luôn đi qua khi m thay đổi là M(3; –6)

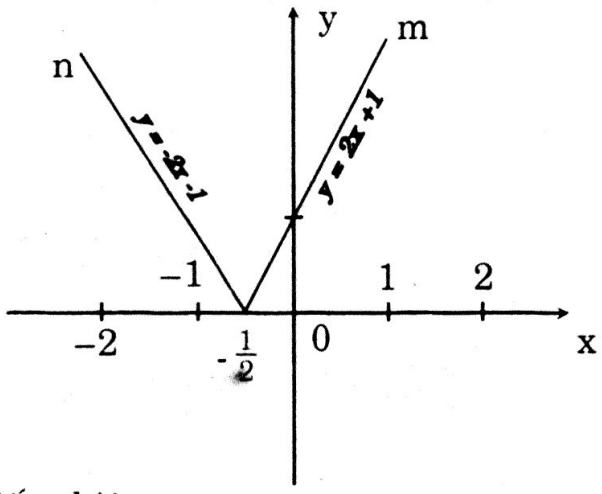
Bài 5. Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau và lập bảng biến thiên:

a) $y = |2x + 1|$ b) $y = -2|x + 1|$ c) $y = 2|x| - 1$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} 2x + 1 \text{ nếu } x \geq -\dfrac{1}{2} \\ -2x - 1 \text{ nếu } x < -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Đồ thị là một đường gấp khúc gồm hai tia Am; An với $A\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

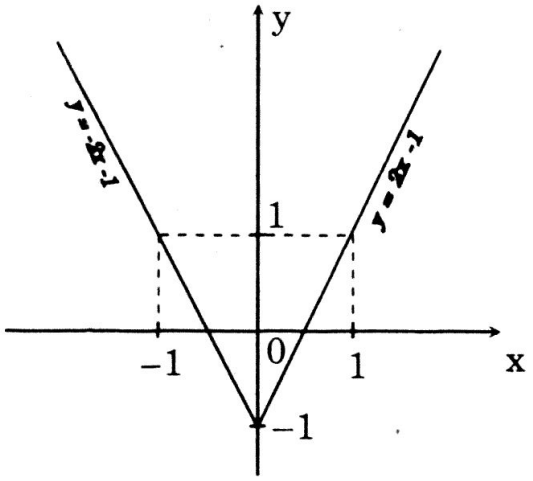
b) Ta có: $y = \begin{cases} -2x - 2 \text{ nếu } x \geq -1 \\ 2x + 2 \text{ nếu } x < -1 \end{cases}$

Đồ thị (xem hình vẽ)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

c) Ta có: $y = \begin{cases} 2x - 1 \text{ nếu } x \geq 0 \\ -2x - 1 \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$



Đồ thị (xem hình vẽ)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Bài 6. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số:

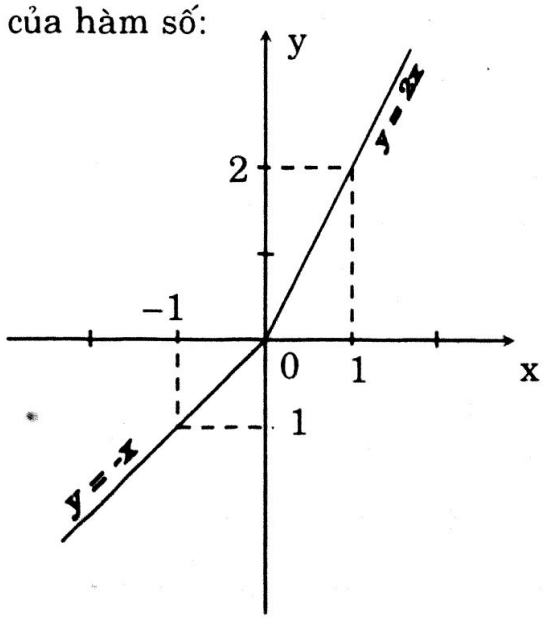
$$y = \begin{cases} 2x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Giải

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Đồ thị (xem hình vẽ)



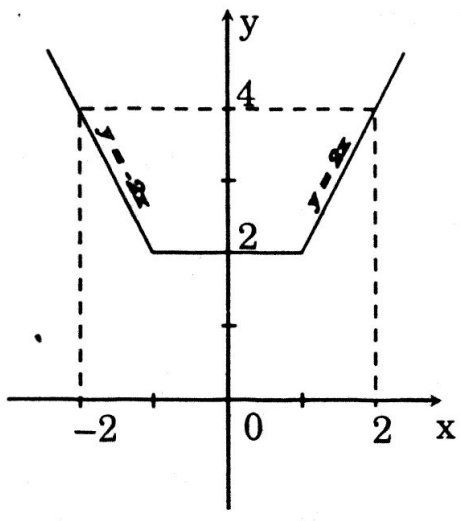
Bài 7. Vẽ đồ thị của hàm số: $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

Giải

Ta có: $y = |x - 1| + |x + 1|$

$$y = \begin{cases} -2x & x \leq -1 \\ 2 & -1 < x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

Đồ thị (xem hình vẽ)



Bài 8. Cho đồ thị (d_1) và (d_2) của hai hàm số: $y = |x|$ và $y = |x + 1|$

Có thể suy ra (d_2) từ (d_1) bằng phép tịnh tiến nào?

Giải

(d_1) là đồ thị của hàm số $y = f(x) = |x|$

(d_2) là đồ thị của hàm số $y = f(x + 1) = |x + 1|$

Vậy (d_2) suy ra từ (d_1) bằng cách tịnh tiến (d_1) sang trái 1 đơn vị.

Bài 9. Cho đồ ıhị (d_1) và (d_2) của hai hàm số:

$y = 3|x|$ và $y = |3x - 6|$.

Có thể suy ra (d_2) từ (d_1) bằng phép tịnh tiến nào?

Giải

(d_1) là đồ thị hàm số $y = 3|x| = f(x)$

(d_2) là đồ thị hàm số $y = 3|x - 2| = f(x-2)$

Vậy (d_2) suy ra từ (d_1) bằng cách tịnh tiến (d_1) sang phải 2 đơn vị.

Bài 10.

Gọi (d) là đồ thị hàm số $y = 3|x|$.

a) Khi tịnh tiến (d) lên trên 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Khi tịnh tiến (d) sang phải 1 đơn vị, rồi xuống dưới 2 đơn vị, t được đồ thị của hàm số nào?

Giải

a) Ta có (d) là đồ thị của hàm $y = 3|x| = f(x)$

Khi tịnh tiến (d) lên trên 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm s $y = f(x) + 3$

Vậy $y = 3|x| + 3$

b) Ta có $y = f(x - 1) = 3|x - 1|$. Từ đó

$y = 3|x - 1| - 2$ là hàm số cần tìm.

§3. HÀM SỐ BẬC HAI

KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $g = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số với $a \neq 0$.
- Sự biến thiên của hàm số bậc hai

X	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a} \quad +\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	$+\infty \searrow -\frac{\Delta}{4a} \nearrow +\infty$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{2a} \quad +\infty$
$y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$	$-\infty \nearrow -\frac{\Delta}{4a} \searrow -\infty$

Khi $a > 0$, hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Khi $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và có giá trị lớn nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

/ BÀI TẬP

Bài 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

a) $y = -x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - 2x + 2$

Giải

a) Tập xác định : D = ℝ

Ta có $-\frac{b}{2a} = 2$. Tọa độ đỉnh S(2; 4); $a = -1 < 0$

Bảng biến thiên

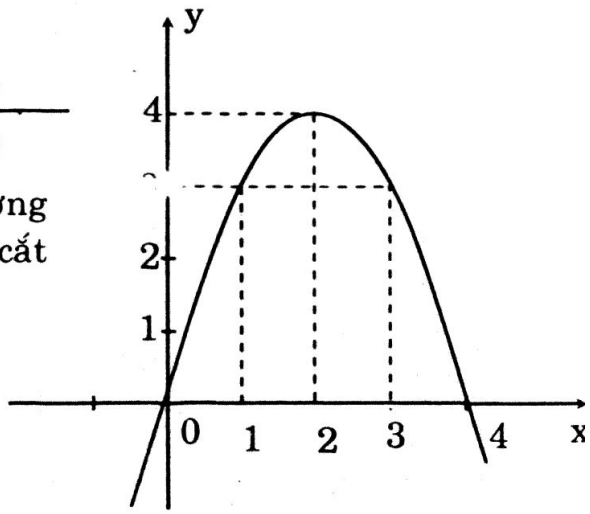
x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$-\infty$	4	$-\infty$

Vẽ đồ thị:

Bảng một số giá trị

x	0	1	2	3	4
y	0	3	4	3	0

Đồ thị là một parabol, nhận đường thẳng x = 2 là trục đối xứng; cắt trục hoành tại điểm (0; 0); (4; 0)



b) Tập xác định : D = $\mathbb{R}$

Ta có $-\frac{b}{2a} = 1$

Tọa độ đỉnh S(1; 1) a = 1 > 0

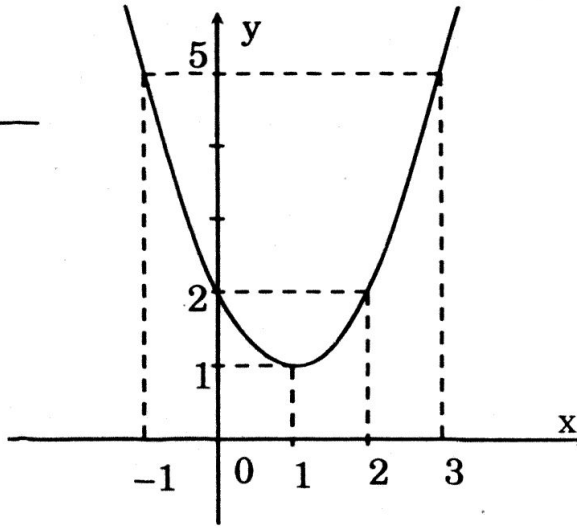
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Vẽ đồ thị

Bảng một số giá trị

x	−1	0	1	2	3
y	5	2	1	2	5



Bài 2. Vẽ đồ thị của các hàm số sau rồi lập bảng biến thiên của nó.

a) $y = x^2 - 2|x| + 3$ b) $y = x^2 - 2|x - 1|$ c) $y = |x^2 - 6x + 5|$

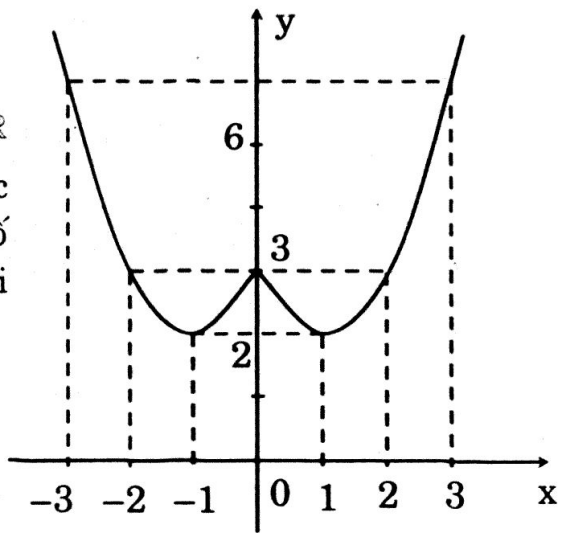
Giải

a) Tập xác định : D = $\mathbb{R}$

Ta thấy hàm số là chẵn trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị đối xứng qua trục tung. Ta vẽ đồ thị của hàm số ứng với $x \geq 0$, sau khi lấy đối xứng qua Oy.

Với $x \geq 0$, ta có: $y = x^2 - 2x + 3$

Với $x < 0$, ta có: $y = x^2 + 2x + 3$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	2	↗	3	↘	2	↗	$+\infty$

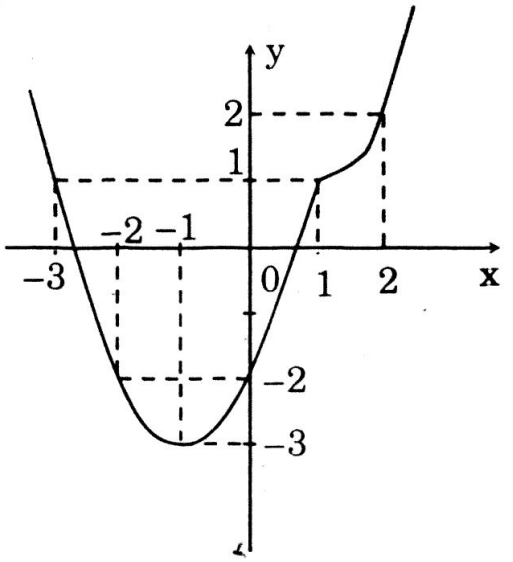
b) Tập xác định : D = $\mathbb{R}$

Ta có: $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{nếu } x \geq 1 \\ x^2 + 2x - 2 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

Ta vẽ parabol $y = x^2 - 2x + 2$, với $x \geq 1$ và parabol $y = x^2 + 2x - 2$ với $x < 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↗	$+\infty$



c) Tập xác định : D = $\mathbb{R}$

Đặt $f(x) = x^2 - 6x + 5$

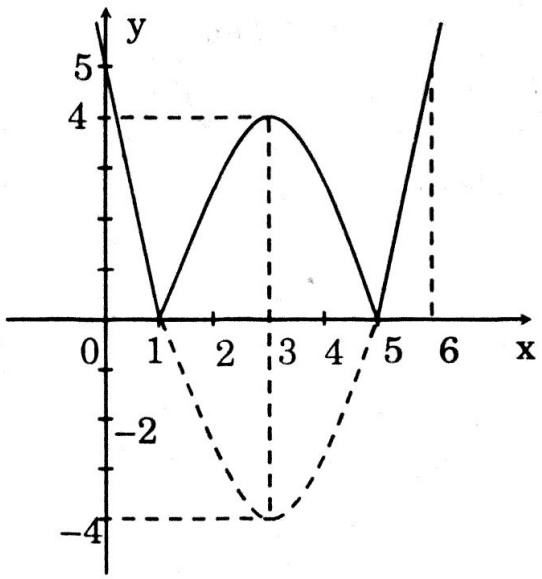
Ta có: $y = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

Nên ta vẽ parabol $y = x^2 - 6x + 5$ và giữ nguyên phần có tung độ không âm; còn lại phần có tung độ âm sẽ lấy đối xứng qua trục hoành, ta được đồ thị của hàm số.

$$y = |x^2 - 6x + 5|$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$



Bài 3. Viết phương trình của parabol (P): $y = ax^2 + bx + 2$ $(a \neq 0)$ biết:

a) Parabol qua A (1; 5) và B(–2; 8)

b) Parabol qua A(3; –4) và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$.

c) Parabol có đỉnh là S(2; –2)

Giải

a) $A \in (P) \Rightarrow 5 = a + b + 2 \Rightarrow a + b = 3$ (1)

$B \in (P) \Rightarrow 8 = 4a - 2b + 2 \Rightarrow 4a - 2b = 6$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta có: $a = 2; b = 1$

Vậy phương trình của (P) là $y = 2x^2 + x + 2$

b) $A \in (P) \Rightarrow -4 = 9a + 3b + 2 \Rightarrow 9a + 3b = -6$ (1)

Trục đối xứng có phương trình $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 6a - 2b = 0$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta có: $a = -\frac{1}{3}; b = -1$

Vậy phương trình của (P) là $y = -\frac{1}{3}x - x + 2$

c) Tọa độ đỉnh của (P) là $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow 4a + b = 0$ (1)

Lại có $S \in (P) \Rightarrow -2 = 4a + 2b + 2 \Rightarrow 4a + 2b = -4$ (2)

Giải hệ (1) và (2) ta có: $a = 1; b = -4$

Vậy phương trình của (P) là: $y = x^2 - 4x + 2$

Bài 4. Viết phương trình của parabol (P): $y = ax^2 + bx + c$, biết:

a) (P) đi qua điểm A(8; 0) và có đỉnh S(6; –12).

b) (P) đi qua điểm A(3; 4) điểm B(0; 2) và trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.

Giải

a) $A \in (P) \Rightarrow 0 = 64a + 8b + c$ (1)

S là đỉnh $\Rightarrow -\frac{b}{2a} = 6 \Rightarrow 12a + b = 0$ (2)

$S \in (P) \Rightarrow -12 = 36a + 6b + c$ (3)

Giải hệ (1), (2) và (3) $\Rightarrow a = 3; b = -36; c = 96$.

Vậy: $y = 3x^2 - 36x + 96$

b) $A \in (P) \Rightarrow 4 = 9a + 3b + c$ (1)

$B \in (P) \Rightarrow 2 = c$ (2)

Trục đối xứng có phương trình: $x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 1$

$\Rightarrow 2a + b = 0$ (3)

Giải hệ (1), (2) và (3) $\Rightarrow a = \frac{2}{3}$; $b = -\frac{4}{3}$; $c = 2$

Vậy $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$

Bài 5.

a) Tìm m để parabol (P): $y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{3}{2}$.

b) Tìm m để parabol (P): $y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

c) Tìm tập hợp các đỉnh của họ parabol (P): $y = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$ khi m thay đổi.

Giải

a) Trục đối xứng của (P) có phương trình:

$$x = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-2m-1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2m + 1 = -3 \Rightarrow m = -2$$

b) Xét phương trình:

$x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1 = 0$ (*)

Điều kiện của bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4(m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}.$$

c) Tọa độ đỉnh S $(x_S; y_S)$ là:

$$\begin{cases} x_S = \dfrac{-2m-1}{2} \\ y_S = \dfrac{-4m-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_S = -2m - 1 \\ 4y_S = -4m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_S = 4m + 2 \\ 4y_S = -4m - 5 \end{cases}$$

Cộng vế với vế hai phương trình ta được: $-4x_S + 4y_S = -3$

$\Leftrightarrow y_S = x_S - \frac{3}{4}$.

Vậy tập hợp các đỉnh của parabol khi m thay đổi là đường thẳng:

$$y = x - \frac{3}{4}.$$

Bài 6. Cho parabol (P)" $y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng (d): $y = x + m$.

a) Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Với điều kiện tồn tại của m ở câu a; tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Giải

a) Tọa độ giao điểm A, B (nếu có) của (P) và (d) thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x + m \end{cases}$$

Trừ vế cho vế, ta được: $x^2 - 3x + 2 - x - m = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 - m = 0$ (*)

(P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

b) Với $m > -2$, phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 là hoành độ tương ứng của A và B.

Ta có: $x_1 + x_2 = 4$; $x_1.x_2 = 2 - m$. Khi đó tung độ của A, B lần lượt là

$y_1 = x_1 + m$; $y_2 = x_2 + m$.

Tọa độ trung điểm $I(x_I; y_I)$ là: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_I = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 2 \\ y_I = 2 + m \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm I là đường thẳng $x = 2$, với các tung độ thỏa mãn điều kiện sau: $y > 0$.

(vì $m > -2 \Rightarrow 2 + m > 0 \Rightarrow y_I > 0$)

Bài 7. Tìm tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy mà từ điểm đó có thể kẻ đến parabol: $y = x^2$ hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Giải

Xét điểm $M(x_0; y_0)$. Phương trình đường thẳng (d) qua M, có hệ số góc

k ($k \neq 0$): $y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y = kx - kx_0 + y_0$

(d) tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình sau có nghiệm kép:

$$x^2 = kx - kx_0 + y_0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0 \qquad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 4(kx_0 - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad k^2 - 4x_0k + 4y_0 = 0 \qquad (**)$$

Qua M kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc

$\Leftrightarrow$ phương trình (**) có hai nghiệm k_1, k_2 và $k_1.k_2 = -1$

$$\Leftrightarrow 4y_0 = -1 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{1}{4}$$

Vậy tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện của bài toán là đường thẳng $y = -\frac{1}{4}$.

Bài 8. Cho hai parabol $y = 2x^2$ (P_1) và $y = 2(x - 4)^2$ (P_2)

Có thể dùng phép tịnh tiến như thế nào để nhận được (P_2) từ (P_1).

Giải

Đặt $y = 2x^2 = f(x)$. Ta có $f(x - 4) = 2(x - 4)^2$

Vậy ta tịnh tiến (P_1) sang phải 4 đơn vị sẽ được (P_2).

Bài 9. Cho hai parabol: $y = 2x^2$ (P_1) và $y = 2x^2 + 4x - 3$ (P_2)

Có thể dùng phép tịnh tiến nào để nhận được (P_2) từ (P_1).

Giải

Ta có: $y = 2x^2 + 4x - 3 = 2(x + 1)^2 - 5$

Đặt $y = 2x^2 = f(x) \Rightarrow f(x + 1) = 2(x + 1)^2$

Tịnh tiến (P_1) sang trái 1 đơn vị, tạ được parabol có phương trình $y = 2(x + 1)^2$ (P).

Bây giờ, ta tiếp tục tịnh tiến (P) xuống dưới 5 đơn vị ta được (P_2): $y = 2(x + 1)^2 - 5$

Bài 10.

a) Tìm m để hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

b) Tìm m để hàm số $y = -x^2 - 4mx + 6$ luôn luôn nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Giải

a) Ta có: $a = 1 > 0$

Hoành độ đỉnh của parabol là $-\dfrac{b}{2a} = -m$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-m$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-m^2+5$	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow -m \le 1 \Leftrightarrow m \ge -1$.

b) Ta có: $a = -1 < 0$

Hoành độ đỉnh của parabol là $-\dfrac{b}{2a} = -2m$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-2m$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$12m^2+6$	↘	$-\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow -2m \le 2 \Leftrightarrow m \ge -1$

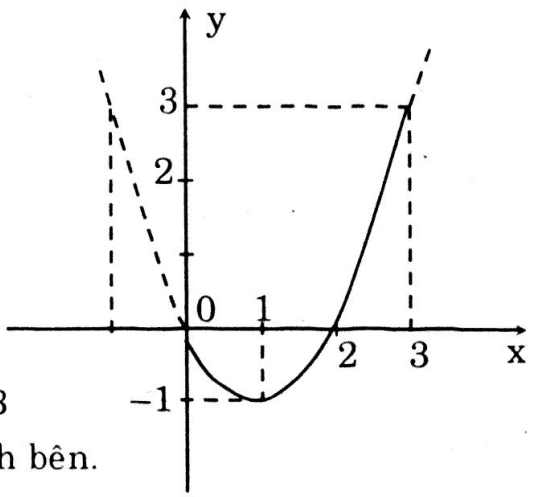
Bài 11.

a) Tìm giá trị lớn nhất , nhỏ nhất của hàm số:

$y = x^2 - 2x$ với $0 \le x \le 3$

b) Tương tự: hàm số

$y = -x^2 + 5x - 4$; $0 \le x \le 3$.



Giải

a) Vẽ parabol $y = x^2 - 2x$ với $0 \le x \le 3$

Đó là phần vẽ bằng nét liền ở hình bên.

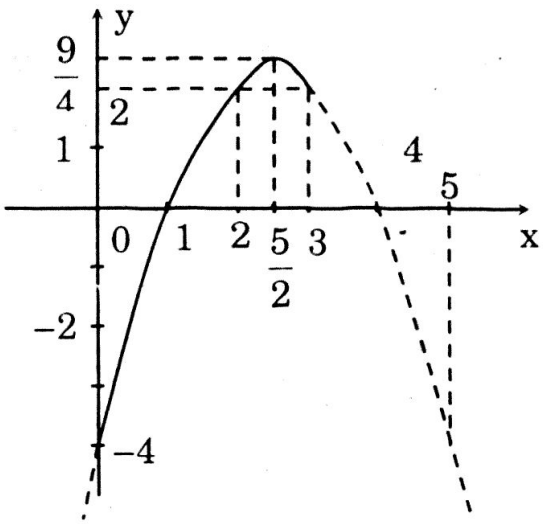
Ta có:

Giá trị nhỏ nhất của y là −1; đạt được khi x = 1.

Giá trị lớn nhất của y là −3, đạt được khi x = 3.

b) Vẽ parabol $y = -x^2 + 5x - 4$, với $0 \le x \le 3$

Đó là phần vẽ bằng nét liền ở hình bên.



Ta có

Giá trị nhỏ nhất của y là -4; đạt được khi $x = 0$.

Giá trị lớn nhất của y là $\frac{9}{4}$, đạt được khi $x = \frac{5}{2}$.

Chú ý: bạn đọc có thể dùng cách lập bảng biến thiên của mỗi hàm số để giải bài toán này.

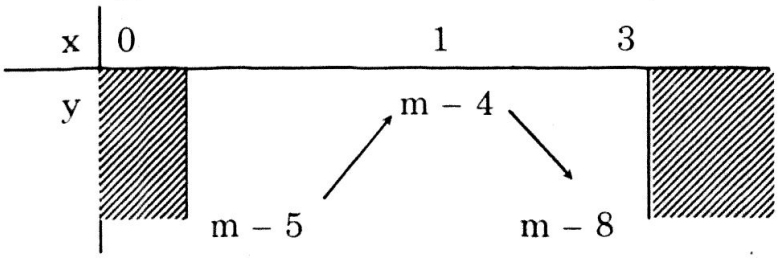
Bài 12. a) Tìm giá trị của m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x + m - 5$ trên $[0; 3]$ bằng 4.

b) Tìm giá trị cua m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2mx + 3m - 1$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng 1.

Giải

a) Ta có: $a = -1 < 0$; $-\frac{b}{2a} = 1$.

Bảng biến thiên của hàm số trên $[0; 3]$



Từ bảng biến thiên, ta có:

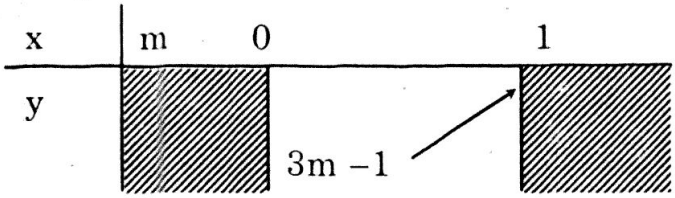
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ làm $m - 8$, ứng với $x = 3$.

Vậy giá trị $m - 8 = 4 \Rightarrow m = 12$.

b) Ta có: $a = 1 > 0$; $-\frac{b}{2a} = m$.

• Trường hợp 1: $m < 0$

Bảng biến thiên của hàm số trên $[0; 1]$

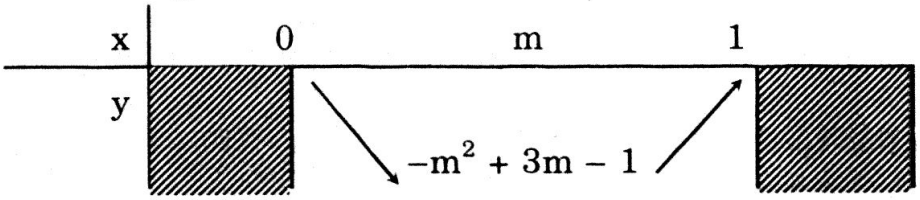


Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$ là $3m - 1$; ứng với $x = 0$.

Vậy $3m - 1 = 1 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$ (không thỏa điều kiện $m < 0$)

• Trường hợp 2: $0 \le m \le 1$

Bảng biến thiên



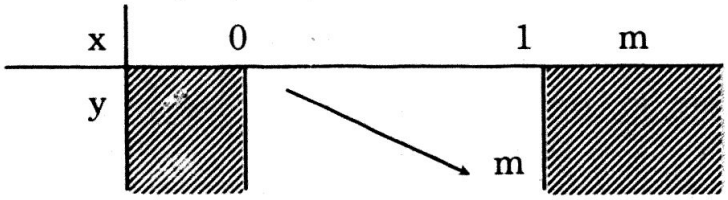
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [0; 1] là $-m^2 + 3m - 1$.

Vậy $-m^2 + 3m - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & \text{(nhận)} \\ m = 2 & \text{(loại)} \end{cases}$

Ta được m = 1

• Trường hợp 3: $m > 1$

Bảng biến thiên:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [0; 1] là m.

Vậy m = 1 (không thỏa điều kiện $m > 1$)

Đáp số: m = 1.

Bài 13.

a) Vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2|x|$.

b) Tìm m để phương trình: $x^2 - 2|x| + 1 = m$ có:

+ Bốn nghiệm phân biệt.

+ Ba nghiệm.

+ Hai nghiệm.

Giải

a) Đồ thị của hàm số chẵn đối xứng qua Oy. Ta vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$; $x \ge 0$. Sau đó lấy đối xứng qua Oy ta được đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2|x|$.

b) Ta có:

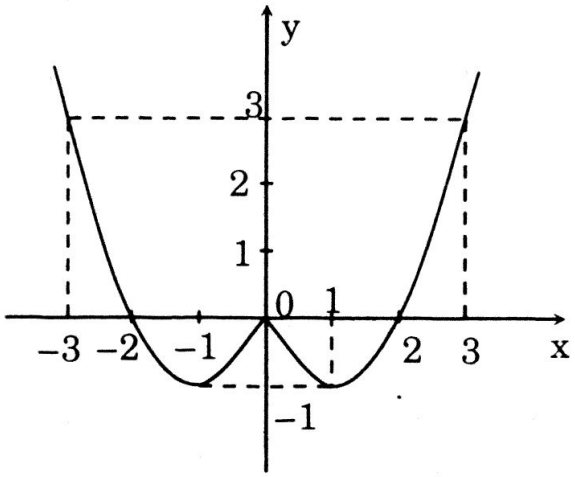
$$x^2 - 2|x| + 1 = m \Leftrightarrow x^2 - 2|x| = m - 1 \quad (*)$$

Đặt $y = x^2 - 2|x|$; có đồ thị ($\mathscr{C}$)

$y = m - 1$; là đường thẳng

(d) song song với Ox.

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của ($\mathscr{C}$) và (d). Ta có:



• Phương trình (*) có bốn nghiệm

$\Leftrightarrow -1 < m - 1 < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1.$

• Phương trình (*) có ba nghiệm

$\Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$

• Phương trình (*) có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m - 1 = -1 \\ m - 1 > 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 0 \\ m > 1 \end{bmatrix}$$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = x - \sqrt{x}$. b) $y = |x| + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ c) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$

Giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus [0; +\infty]$

b) Ta có $y = |x| + \sqrt{(x-1)^2} = |x| + |x - 1|$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

c) Điều kiện: $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{bmatrix}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

Bài 2. Lập bảng biến thiên của các hàm số:

a) $y = -3x + 5$ b) $y = -x^2 - x + 3$ c) $y = x^2 - 4x + 5$

Giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có $a = -3 < 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

b) Tập xác định: D = $\mathbb{R}$. Ta có: $a = -1 < 0$; $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{13}{4}$	↘	$-\infty$

c) Tập xác định: D = $\mathbb{R}$. Ta có: $a = 1 > 0$; $-\frac{b}{2a} = 2 > 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Bài 3.

a) Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = 2x^3 + x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Chứng tỏ hàm số $y = f(x) = |x| + |x - 1|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

Giải

a) Tập xác định: D = $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty)$; $x_1 \neq x_2$

Ta có $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\left(2x_2^3 - x_2\right) - \left(2x_1^3 - x_1\right)}{x_2 - x_1} = 2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 1\right)$

$$= 2\left[\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3x_2^2}{4} + 1\right] > 0.$$

Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Ta có: $\forall x \in (1; +\infty) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$

Khi đó: $y = f(x) = x + x - 1 = 2x - 1$

Hàm số bậc nhất này có $a = 2 > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$

ài 4. Tìm giá trị của m để hàm số: $y = mx + m^2 - 1$

a) Đồng biến trên $\mathbb{R}$. b) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Giải

a) Hàm số bậc nhất đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 0$. Vậy $m > 0$.

b) Tương tự: $m < 0$

ài 5. Xét trình chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \sqrt{x^2} + x^2$ b) $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Giải

a) Ta có: $y = f(x) = |x| + x^2$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$

$\forall x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow -x \in \mathbb{R}\ (-\infty; +\infty)$

$\forall x \in \mathbb{R}: f(-x) = |-x| + (-x)^2 = |x| + x^2 = f(x).$

Vậy hàm số chẵn.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

$\forall x \in D \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow -x \neq \pm 1 \Rightarrow -x \in D$

$\forall x \in D: f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$

Vậy hàm số lẻ trên D.

ài 6. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 4}$ b) $y = f(x) = x^2 - 2x + 5$

c) $y = f(x) = |x| + |x - 1|$

Giải

a) Tập xác định: $D = [0; +\infty)$

Ta thấy: $\exists x_0 = 1 \in D$ nhưng $-x_0 = -1 \notin D$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta thấy $\exists x_0 = 1 \in \mathbb{R}$; $f(1) = 4$; $f(-1) = 8 \Rightarrow f(-1) \neq \pm f(1)$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta thấy $\exists x_0 = 5 \in \mathbb{R}$; $f(5) = 9$; $f(-5) = 11 \Rightarrow f(-5) \neq f(5)$

Vậy hàm số không chẵn, không lẻ.

Bài 7. Chứng tỏ đồ thị của hàm số $y = |x| + |x - 1|$ có trục đối xứng l đường thẳng $x = \frac{1}{2}$.

Giải

Đặt $\begin{cases} X = x - \frac{1}{2} \\ Y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = X + \frac{1}{2} \\ y = Y \end{cases}$

Ta có: $Y = \left|X + \frac{1}{2}\right| + \left|X - \frac{1}{2}\right| = F(X)$

Ta sẽ chứng minh hàm số $Y = F(X)$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$.

- $\forall X \in \mathbb{R} \Rightarrow -X \in R$

$\forall X \in \mathbb{R}$: $F(-X) = \left|-X + \frac{1}{2}\right| + \left|-X - \frac{1}{2}\right| = \left|X - \frac{1}{2}\right| + \left|X + \frac{1}{2}\right| = F(X)$

Hàm số $Y = F(X)$ là chẵn trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị của nó nhận trục tu là trục đối xứng; tức là đường thẳng có

Phương trình: $x = 0$ hay $x - \frac{1}{2} = 0$

Vậy đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số đã cho.

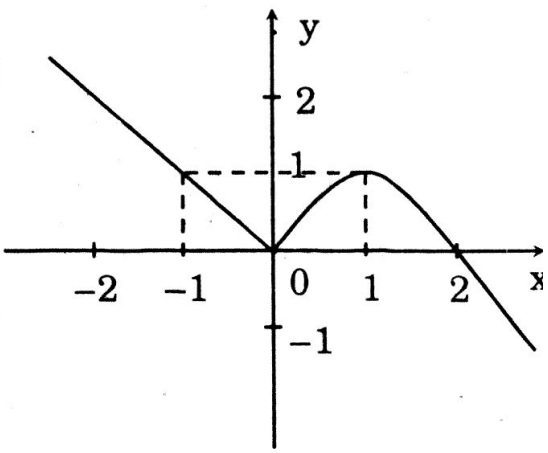
Bài 8. a) Vẽ đồ thị của hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} -x \text{ nếu } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$

b) Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm, với $f(x)$ là biểu th xác định ở câu a.

Giải

a) Đồ thị (xem hình vẽ)

b) Từ đồ thị đã vẽ ở câu a, ta có: Phương trình $f(x) = m$, có ba nghiệm khi $0 < m < 1$.



ài 9. Cho hàm số: $y = x^2 + mx + 3$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m = 4.

b) Khi m thay đổi, tìm tập hợp các đỉnh của parabol $y = x^2 + mx + 3$.

c) Tìm các điểm cố định mà họ parabol $y = x^2 + mx + 3$ đi qua khi m thay đổi.

Giải

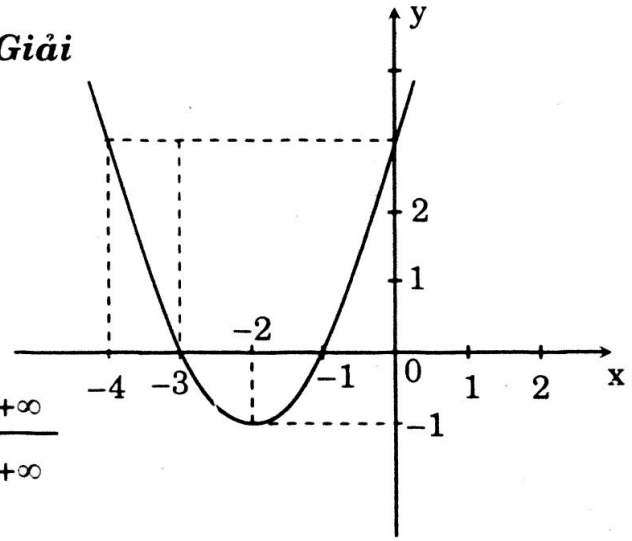
a) m = 4. Ta có: $y = x^2 + 4x + 3$

Tập xác dịnh: D = $\mathbb{R}$

$a = 1 > 0; -\frac{b}{2a} = -2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$



Đồ thị lă parabol có đỉnh (–2; –1), nhận đường thẳng x = –2 là trục đối xứng; cắt trục hoành tại hai điểm (–1; 0); (–3; 0); cắt trục tung tại điểm (0; 3).

b) Tọa độ đỉnh của parabol: $S(x_s; y_s)$ là:

$$\begin{cases} x_s = -\frac{m}{2} & (1) \\ y_s = -\frac{m^2}{4} + 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow m = -2x_s$. Thế vào (2), ta được: $y_s = -x_s^2 + 3$ Vậy tập hợp các điểm S là parabol: $y = -x^2 + 3$.

c) Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà họ parabol: $y = x^2 + mx + 3$ luôn đi qua, khi m thay đổi. Ta có:

$$y_0 = x_0^2 + mx_0 + 3, \forall m.$$

$$\Leftrightarrow mx_0 + x_0^2 + 3 - y_0 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0^2 + 3 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 3 \end{cases}$$

Vậy điểm cố định cần tìm là (0; 3)

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

Bài 1. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{-x} + \frac{4}{\sqrt{3+x}}$ là

A. $(-3; 0)$; B. $(-3; 0]$; C. $[0; +\infty)$; D. $(-\infty; -3)$.

Bài 2. Hàm số $y = x^3 - 3x$ đồng biến trên khoảng sau:

A. $(0; 1)$; B. $(-1; 1)$; C. $(-1; 0)$; D. $(1; +\infty)$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{1}{2x-3}$. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số.

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$; B. R;

C. $(-\infty; \frac{3}{2})$; D. $(-\infty; \frac{3}{2})$ và $(\frac{3}{2}; +\infty)$.

Bài 4. Trục đối xứng của đồ thị hàm số: $y = |x| + |x-2|$ là đường thẳng

A. $x = 0$; B. $x = 2$; C. $x = 1$; D. $x = -2$.

Bài 5. Cho hàm số f(x) là hàm số lẻ. Hàm số $|f(x)|$ là hàm số:

A. lẻ; B. chẵn;

C. không chẵn, không lẻ; D. vừa chẵn vừa lẻ.

Bài 6. Cho hàm số f(x) là hàm số lẻ. Hàm số f(–x) là hàm số:

A. chẵn; B. lẻ;

C. không chẵn, không lẻ; D. vừa chẵn vừa lẻ.

Bài 7. Cho parabol $y = ax^2 - 4x + c$, có hoành độ đỉnh là –3 và đi q M(–2; 1). Tìm a và c?

A. $a = \frac{2}{3}, c = -\frac{13}{3}$; B. $a = -\frac{2}{3}, c = \frac{13}{3}$;

C. $a = \frac{2}{3}, c = -\frac{10}{3}$; D. $a = -\frac{2}{3}, c = -\frac{13}{3}$.

Bài 8. Cho parabol $y = 2x^2 + bx + c$, có hoành độ đỉnh là 2 và qua điể M(1; –2). Tìm b và c?

A. $b = 8, c = 4$; B. $b = -8, c = 4$;

A. $b = 4, c = -8$; D. $b = -8, c = -4$.

Bài 9. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$, qua điểm M(2; –3) và đỉnh S(1; – Tìm a, b, c?

A. $a = 1, b = 2; c = -3;$ B. $a = 1, b = -2; c = 3;$

C. $a = 1, b = -2; c = -3;$ D. $a = -1, b = 2; c = -3.$

Bài 10. Phương trình $2x^2 - 3|x| + 1 = m$ có bốn nghiệm khi:

A. $-\frac{1}{8} < m < 1;$ B. $m > 1$ hoặc $m < -\frac{1}{8}$

C. $-\frac{1}{8} \le m < 1;$ D. $-\frac{1}{8} \le m \le 1.$

Đáp án

1. B **2.** D **3.** D **4.** C **5.** B **6.** B **7.** D **8.**B **9.** C **10.** A

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

trong đó f(x) và g(x) là những biểu thức của x. Ta gọi f(x) là vế trái, g(x) là vế phải của phương trình (1).

Nếu có số thực x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một nghiệm của phương trình (1).

Giải phương trình (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó (nghĩa là tìm tập nghiệm).

Nếu phương trình không có nghiệm nào cả thì ta nói phương trình vô nghiệm (hoặc nói tập nghiệm của nó là rỗng).

2. Phương trình tương đương

Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

3. Phép biến đổi tương đương

Nếu thức hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc **cùng một biểu thức;**

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số **khác 0 hoặc với cùng một** biểu thức luôn có giá trị khác 0.

Kí hiệu. Ta dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của các phương trình.

4. Phương trình hệ quả

Nếu mọi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ **đều là nghiệm** của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ thì phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$.

Ta viết

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$$

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm **không phải là nghiệm** của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là **nghiệm ngoại lai.**

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Tìm điều kiện của các phương trình sau:

a) $\sqrt{x-1} - x = 2 + \sqrt{x-1}$ b) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x-4}} = \sqrt{5-x}$

c) $\dfrac{2x+1}{x^2-9} = \sqrt{2x+4}$

Giải

a) Điều kiện: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x-4>0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < x \leq 5$

c) Điều kiện: $\begin{cases} x^2-9 \neq 0 \\ 2x+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Bài 2. Giải các phương trình

a) $x + \sqrt{2-x} = 1 + \sqrt{2-x}$ (1) b) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{4}{\sqrt{x-1}}$ 2)

c) $\dfrac{x^2-4x-2}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$ (3)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

b) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

c) (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 4x - 2 = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$

Bài 3. Giải các phương trình

a) $(x^2 - 3x + 2).\sqrt{x-3} = 0$ (1)

b) $(x^2 - x - 2).\sqrt{x+1}$ (2)

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2}$ (3)

Giải

a) Điều kiện: $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện, ta được: $x = 3$.

b) Điều kiện: $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Đáp số: $x = -1$; $x = 2$

c) Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$(*)

Khi đó (3) $\Leftrightarrow x = 1 - (x - 2) \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Ta thấy $x = \dfrac{3}{2}$ không thỏa điều kiện (*). Vậy phương trình vô nghiệm.

Bài 4. Tìm m để hai phương trình tương đương:

a) $x + 1 = 0$ (1) và $m(x^2 + 3x + 2) + m^2x + 1 = 0$ (1)

b) $x^2 - 4 = 0$ (1) và $x^2 - (m + 1)x + 4 = 0$ (2)

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x = -1$

Thế $x = -1$ vào phương trình (2), ta được:

$m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Thử lại:

- $m = 1$. Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vì $x = -3$ không là nghiệm của (1). Vậy (1) và (2) không tương đương.

• m = −1. Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Vậy (1) và (2) tương đương.

Đáp số: m = −1.

b) Ta có: (1) $\Leftrightarrow x = \pm 2$

• Với x = 2. Thế vào (2), ta được: $2^2 - (m + 1).2 + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

Thử lại: m = 3. Ta có: (2) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy hai phương trình (1) và (2) tương đương.

• Với x = −2. Thế vào (2), ta được: m = −5.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Vậy (1) và (2) tương đương. Đáp số: m = 3; m = −5.

Bài 5. Hai phương trình sau có tương đương không?

a) $2x - 5 + \dfrac{1}{x-4} = 4 - x + \dfrac{1}{x-4}$ và $2x - 5 = 4 - x$

b) $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = 0$ và $x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $\sqrt{x-2}\,.\sqrt{2x+3} = 3$ và $\sqrt{(x-2)(2x+3)} = 3$

d) $\sqrt{x+2} = x + 1$ và $x + 2 = (x + 1)^2$.

Giải

a) Hai phương trình tương đương vì có cùng nghiệm x = 3.

b) Hai phương trình không tương đương vì x = −3 là nghiệm của phương trình thứ hai nhưng không phải là nghiệm phương trình thứ nhất.

c) Hai phương trình không tương đương vì $x = -\dfrac{5}{2}$ là nghiệm của phương trình thứ hai nhưng không phải là nghiệm phương trình thứ nhất.

(Sau khi bình phương hai vế của mỗi phương trình, ta đều đi đến phương trình: $2x^2 - x - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Ta phải thử lại vào mỗi phương trình hai giá trị này !)

d) Phương trình thứ nhất cần đặt điều kiện: $x \geq -1$.

Giải phương trình thứ hai, ta được: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Ta thấy $x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, không thỏa điều kiện $x \geq -1$.

Bài 6. Giải hệ phương trình

a) $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x} + 1$ b) $2x - \sqrt{3-x} = \sqrt{x-3} + 6$

c) $x + \sqrt{2-x} = \sqrt{2x-4} + 1$

Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Ta thấy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

b) Điều kiện $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

Ta thấy $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

c) Điều kiện $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Ta thấy $x = 2$ không phải là nghiệm của phương trình.

Bài 7. Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế và cho biết các nghiệm ngoại lai của phương trình.

a) $\sqrt{x-2} = x - 4$ b) $\sqrt{4-6x-x^2} = x + 4$

c) $|x-2| = 2x - 1$

Giải

a) Bình phương hai vế, ta được: $x - 2 = x^2 - 8x + 16$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

Thử lại: $x = 3$: không là nghiệm phương trình.

$x = 6$: là nghiệm phương trình

Đáp số: $x = 6$

Nghiệm ngoại lai: $x = 3$.

b) Bình phương hai vế, ta được: $4 - 6x - x^2 = x^2 + 8x + 16$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -6 \end{array}\right.$$

Thử lại: $x = -1$: là nghiệm của phương trình.

$x = -6$: không là nghiệm phương trình.

Đáp số: $x = -1$

Nghiệm ngoại lai: $x = -6$.

c) Bình phương hai vế, ta được:

$x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Thử lại: x = 1: là nghiệm của phương trình

x = −1: không là nghiệm của phương trình

Đáp số: x = 1; Nghiệm ngoại lai: x = −1.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình bậc nhất

Cách giải và biện luận phương trình dạng ax + b = 0 được tóm tắt trong bảng sau:

ax + b = 0 (1)		
Hệ số		Kết luận
a ≠ 0		(1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$
a = 0	b ≠ 0	(1) vô nghiệm
	b = 0	(1) nghiệm đúng với mọi x

Khi a ≠ 0 phương trình ax + b = 0 được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

2. Phương trình bậc hai

Cách giải và công thức nghiệm của phương trình bậc hai được tóm tắt trong bảng sau:

$ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ 0) (2)	
$\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
Δ > 0	(2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
Δ = 0	(2) có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$
Δ < 0	(2) vô nghiệm

3. Định lí Vi-ét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (a ≠ 0) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếy hai số u và v có tổng u + v = S và tích uv = P thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình

a) $(m^2 + 2)x - 2m = x - 3$ (1)

b) $m(x - m + 3) = x + m - 2$ (2)

c) $(m - 2)^2x = m(1 - 4x) + 8x + 2$ (3)

Giải

$(1) \Leftrightarrow (m^2 + 1)x = 2m - 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{2m - 3}{m^2 + 1}$ (vì $m^2 + 1 > 0, \forall m$)

Đáp số: $\forall m \in \mathbb{R} : x = \dfrac{2m - 3}{m^2 + 1}$

b) $(2) \Leftrightarrow (m - 1)x = m^2 - 2m - 2$

+ Nếu $m = 1$. Ta có: $0.x = -3$. Phương trình vô nghiệm

+ Nếu $m \neq 1$. Ta có: $x = \dfrac{m^2 - 2m - 2}{m - 1}$.

Đáp số: $m = 1$. Phương trình vô nghiệm.

$m \neq 1$. Phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{m^2 - 2m - 2}{m - 1}$

c) $(3) \Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m + 2$

+ Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{1}{m - 2}$

+ Nếu $m = 2$. Ta có: $0.x = 4$. Phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m = -2$. Ta có: $0.x = 0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài 2. Giải và biện luận các phương trình.

a) $\dfrac{x - m}{x - 2} + \dfrac{x - 3}{x} = 2$ (1) b) $\dfrac{x - m}{x - 1} + \dfrac{x - 1}{x - m} = 2$ (2)

Giải

a) Điều kiện: $x \neq 0; 2$. Khi đó:

$(1) \Leftrightarrow x(x - m) + (x - 2)(x - 3) = 2x(x - 2)$

$\Leftrightarrow x^2 - mx + x^2 - 5x + 6 = 2x^2 - 4x \Leftrightarrow (m + 1)x = 6$ (*)

+ Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{m + 1}$.

Đối chiếu điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{m + 1} \neq 0 \text{ (luôn đúng } \forall m \neq 1) \\ \dfrac{6}{m + 1} \neq 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

+ Nếu $m = -1$. Phương trình (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

+ Nếu $m = 2$. Phương trình (1) vô nghiệm.

Đáp số: $m \neq -1$; 2 Phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{6}{m+1}$

$m = -1$; 2 Phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq m \end{cases}$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow (x - m)^2 + (x - 1)^2 = 2(x - 1)(x - m)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2mx - 2x + 2m$

$\Leftrightarrow m^2 + 1 = 2m \Leftrightarrow (m - 1)^2 = 0$

Vậy: $m = 1$ phương trình luôn nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$m \neq 1$ phương trình vô nghiệm.

Bài 3.

a) Tìm m để phương trình $(m - 1)^2 x = 4x + m + 1$ vô nghiệm

b) Tìm m để phương trình sau luôn nghiệm đúng với mọi x:
$m^2(x + 1) = x + m$

c) Tìm m để phương trình $\dfrac{x+2}{x-m} = \dfrac{x+1}{x-1}$ có nghiệm duy nhất.

Giải

a) Ta có: $(m - 1)^2 x = 4x + m + 1 \Leftrightarrow (m^2 - 2m - 3)x = m + 1$ (*)

xét: $m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases}$

+ $m = -1$. Ta có: (*) $\Leftrightarrow 0x = 0$. Phương trình này không vô nghiệm.

+ $m = 3$. Ta có: (*) $\Leftrightarrow 0x = 4$. Phương trình vô nghiệm

Đáp số: $m = 3$.

b) Ta có: $m^2(x + 1) = x + m \Leftrightarrow (m^2 - 1)x = m - m^2$ (*)

Xét $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

+ Nếu $m = 1$. Ta có: (*) $\Leftrightarrow 0x = 0$. Phương trình nghiệm đúng với mọi x.

+ Nếu $m = -1$. Ta có: (*) $\Leftrightarrow 0x = -2$. Phương trình vô nghiệm.

Đáp số: $m = 1$

c) Điều kiện: $\begin{cases} x - m \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x \neq 1 \end{cases}$

Khi đó: $\frac{x+2}{x-m} = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = (x+1)(x-m) \Leftrightarrow mx = 2 - m.$

Nếu $m \neq 0$, ta có: $x = \frac{2-m}{m}$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{2-m}{m} \neq m \\ \frac{2-m}{m} \neq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \\ 2m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases}$. Đáp số: $m \neq -2; 1; 0$

Bài 4. Giải và biện luận các phương trình

a) $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ (1)

b) $(m-1)x^2 - 2(m-3)x + m - 4 = 0$ (2)

Giải

a) + Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

$(1) \Leftrightarrow -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

+ Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

$\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m-3) = 6m + 7$

• Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 6m + 7 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{7}{6}$ phương trình vô nghiệm

• Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{6}$ phương trình có nghiệm kép: $x = -5$

• Nếu $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{7}{6} \\ m \neq -1 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{m + 2 \pm \sqrt{6m+7}}{m+1}$.

b) + Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. Ta có: $(2) \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

+ Nếu: $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

$\Delta' = (m-3)^2 - (m-1)(m-4) = -m + 5$

• Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow -m + 5 < 0 \Leftrightarrow m > 5$ phương trình vô nghiệm

• Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 5$ phương trình có nghiệm kép: $x = \frac{1}{2}$

• Nếu $\begin{cases}\Delta' > 0 \\ a \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m < 5 \\ m \neq 1\end{cases}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: x $= \dfrac{m - 3 \pm \sqrt{5 - m}}{m - 1}$

Bài 5. a) Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 3m + 4 = 0$ (1)

Có hai nghiệm phân biệt

b) Tìm m để phương trình có nghiệm kép

$$x^2 - 2(m - 1)x + 3m + 1 = 0 \qquad (2)$$

Giải

a) $\Delta' = (m - 1)^2 - (m^2 - 3m + 4) = m - 3$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > o$

$\Leftrightarrow m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$

b) $\Delta' = (m - 1)^2 - (3m + 1) = m^2 - 5m$

Phương trình có nghiệm kép $\Leftrightarrow m^2 - 5m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = 0 \\ m = 5\end{array}\right.$

Bài 6. Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh một tam giác

Chứng minh phương trình sau vô nghiệm

$$c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0 \ (*)$$

Giải

Ta có: $\Delta = (a^2 - b^2 - c^2) - 4b^2c^2 = (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$

$= [a^2 - (b + c)^2][a^2 - (b - c)^2]$

$= (a + b + c)(a - b - c)(a + b - c)(a - b + c) < 0$

Vì trong một tam giác tổng 2 cạnh luôn lớn hơn cạnh thứ 3.

Vậy (*) vô nghiệm.

Bài 7. Cho 2 phương trình:

$x^2 + ax + b = 0$ (1) và $x^2 + cx + d = 0$ (2) và $ac \geq 2(b + d)$

Chứng minh rằng ít nhất 1 trong 2 phương trình có nghiệm.

Giải

Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là biệt thức của phương trình (1); (2)

Xét $\Delta_1 + \Delta_2 = a^2 - 4b + c^2 - 4d$

$= a^2 + c^2 - 4(b + d) \geq a^2 + c^2 - 2ac$ vì $ac \geq 2(b + d)$

$= (a - c)^2 \geq 0$

Vậy tồn tại ít nhất 1 trong 2 số Δ_1; Δ_2 không âm $\Rightarrow$ ít nhất 1 trong 2 phương trình có nghiệm.

Bài 8. Chứng minh rằng nếu phương trình $x^2 + px + q = 0$ có 2 nghiệm thì hai phương trình:

$x^2 + (p + 2a)x + q + ap = 0$ (1)

$3x^2 + 2(p + a)x + q + ap = 0$ (2)

cũng có hai nghiệm phân biệt với mọi a.

Giải

Gọi Δ_1, Δ_2 là các biệt thức của 2 phương trình (1) và (2)

Ta có: $\Delta_1 = (p + 2a)^2 - 4(q + ap) = p^2 - 4ap + 4a^2 - 4q + 4ap$

$= p^2 - 4q + 4a^2 > 0$ vì $p^2 - 4q = \Delta > 0$

(Δ là biệt thức của phương trình $x^2 + px + q = 0$)

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm phân biệt $\forall a$.

Ta có: $\Delta'_2 = (p + a)^2 - 3q - 3ap = p^2 - ap + a^2 - 3q$

$= (p^2 - 4q) + a^2 - ap + q$

Lại có: $a^2 - ap + q = (a - \frac{P}{2})^2 - \frac{p^2 - 4p}{4} \geq -\frac{p^2 - 4p}{4}$. $\forall a$

Vậy $\Delta'_2 \geq (p^2 - 4q) - \frac{p^2 - 4p}{4} = \frac{3}{4}(p^2 - 4q) = \frac{3}{4}\Delta > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

ài 9. Tìm m để hai phương trình sau có ít nhất một nghiệm chung.

$x^2 + mx + 1 = 0$ (1); $x^2 + x + m = 0$ (2)

Giải

Điều kiện cần:

Giả sử x_0 là nghiệm chung của (1) và (2) ta có: $\begin{cases} x_0^2 + mx_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + x_0 + m = 0 \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình, ta được: $(m - 1)x_0 = m - 1$

$\Leftrightarrow (m - 1)(x_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ x_0 - 1 = 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ x_0 = 1 \end{bmatrix}$

+ Nếu m = 1. Hai phương trình trở thành: $x^2 + x + 1 = 0$ (vô nghiệm)

+ Nếu $x_0 = 1$ Thế vào (1) ta được: $m = -2$

khi đó: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

(2) $\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -2 \end{bmatrix}$

Vậy hai phương trình có một nghiệm chung là x = 1

Đáp số: m = –2

ài 10. a) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $m = 3 + 4x - x^2$.

b) Cho $4x + y = 1$. Chứng minh: $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$

Giải

a) Ta có: $m = 3 + 4x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + m - 3 = 0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 7$

Vậy giá trị lớn nhất của m là 7. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = 2$

b) Từ giả thiết, ta có: $y = 1 - 4x$.

Khi đó đặt $m = 4x^2 + y^2$, ta có: $m = 4x^2 + (1 - 4x)^2$

$\Leftrightarrow 20x^2 - 8x + 1 - m = 0$ (*) phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 <$

$20m \geq 4 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{5}$ (đ.p.c.m)

Bài 11. a) Tìm m để phương trình $x^2 - mx + 15 = 0$

Có một nghiệm bằng 3 và tìm nghiệm còn lại.

b) Tìm m để phương trình $x^2 - 7x + m = 0$

Có một nghiệm bằng 4 và tìm nghiệm còn lại

Giải

a) Gọi hai nghiệm là x_1, x_2 và trong đó $x_1 = 3$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 60 \geq 0$

Khi đó, theo định lí Vi–ét, ta có: $\begin{cases} 3 + x_2 = m \\ 3x_2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ m = 8 \end{cases}$

($m = 8$ thỏa điều kiện $m^2 - 60 \geq 0$)

b) Gọi hai nghiệm là x_1; x_2 và trong đó $x_1 = 4$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 49 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{49}{4}$

Khi đó, theo định lí Vi–ét, ta có: $\begin{cases} 4 + x_2 = 7 \\ 4x_2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3 \\ m = 12 \end{cases}$

($m = 12 \leq \frac{49}{4}$).

Bài 12. Chứng tỏ hệ thức $kb^2 = (k + 1)^2 ac$ $(k \neq -1)$ là điều kiện cần và đ để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm và một nghiệ bằng k lần nghiệm kia.

Giải

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - \frac{4kb^2}{(k+1)^2} = \frac{(k-1)^2 b^2}{(k+1)^2} \geq 0$

(vì $kb^2 = (k + 1)^2 ac$)

$\Leftrightarrow ac = \frac{kb^2}{(k+1)^2}$. Vậy phương trình bậc 2 luôn có nghiệm x_1; x_2

Giải sử nghiệm này bằng k lần nghiệm kia

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 = kx_2 \\ x_2 = kx_1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (x_1 - kx_2)(x_2 - kx_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + k^2)x_1x_2 - k(x_1^2 + x_2^2) = 0 \Leftrightarrow (1 + k^2)\frac{c}{a} - k(\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k + 1)^2ac - kb^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow kb^2 = (k + 1)^2ac \text{ (đpcm)}$$

ài 13. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm và tồn tại một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm, không phụ thuộc m.

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm khác dấu và bằng nhau về giá trị tuyệt đối.

Giải

a) Ta có: $\Delta' = m^2 - 3m + 4 = (m - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0;$

vì $(m - \frac{3}{2})^2 \geq 0, \forall m.$

Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

Theo định lí Vi–et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1x_2 = m - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 2 \\ 2x_1x_2 = 2m - 6 \end{cases}$

Trừ từng vế hai phương trình trên, ta được: $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 4$

b) Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 < 0 \\ |x_1| = |x_2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 < 0 \\ x_1^2 = x_2^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 < 0 \\ x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 < 0 \\ (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P < 0 \\ S = 0 \end{cases}$$

(vì $x; x_2$ khác dấu nên $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0$)

Vậy $\begin{cases} m - 3 < 0 \\ 2(m - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

ài 14. Cho phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 2.

Giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 12 - 3m^2 \geq 0$ (*)

Khi đó phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

Điều kiện của x_1; x_2 là $\begin{cases} P > 0 \\ S > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 > 0 \\ m > 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 > 0 \\ m > 0 \\ S^2 - 2P = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 > 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 2(m^2 - 3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3 > 0 \\ m > 0 \\ m^2 = 2 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn điều kiện bài toán

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình trùng phương: $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$

Đặt $y = x^2$; $y \geq 0$, ta được về phương trình bậc hai:

$ay^2 + by + c = 0$

2. Phương trình chứa ẩn số trong dấu căn bậc hai

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$$

3. Phương trình chứa ẩn số trong dấu giá trị tuyệt đối

a) $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$

b) $|f(x)| = g(x)$

Phương pháp thứ nhất

Nếu xét dấu f(x) đơn giản, ta sử dụng định nghĩa:

$$|f(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ nếu } f(x) < 0 \end{cases}$$

Phương pháp thứ hai

Nếu xét dấu g(x) đơn giản, ta có:

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{cases}$$

BÀI TẬP

ài 1. Giải và biện phương trình

a) $|x - m| = |x + 1|$ (1) b) $|mx - 1| = 2$ (2)

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - m = x + 1 \\ x - m = -(x + 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ 2x = m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ x = \dfrac{m-1}{2} \end{array}\right.$

Nếu $m \neq 1$ phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{m-1}{2}$

Nếu $m = 1$ phương trình (1) luôn nghiệm đúng với mọi x.

b) (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx - 1 = 2 \\ mx - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx = 3 \ (*) \\ mx = -1 \ (**) \end{array}\right.$

Nếu $m = 0$. Phương trình (*) và (**) vô nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm.

Nếu $m \neq 0$. Phương trình (2) có nghiệm: $x = \dfrac{3}{m}$; $x = \dfrac{-1}{m}$

ài 2. Giải các phương trình:

a) $|3x - 2| = 11 - x$ (1) b) $|5x - 4| = 4 - 5x$ (2)

Giải

a) + Nếu $3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2}{3}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 3x - 2 = 11 - x \Leftrightarrow 4x = 13 \Leftrightarrow x = \dfrac{13}{4}$

Vì $\dfrac{13}{4} > \dfrac{2}{3}$ nên $x = \dfrac{13}{4}$.

+ Nếu $3x = 2 < 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow -(3 - 2) = 11 - x \Leftrightarrow -3x + 2 = 11 - x$

$\Leftrightarrow 2x = -9 \Leftrightarrow x = -\dfrac{9}{2}$. Vì $-\dfrac{9}{2} < \dfrac{2}{3}$, nên $x = -\dfrac{9}{2}$

Đáp số: $x = \dfrac{13}{4}$; $-\dfrac{9}{2}$

b) + Nếu $5x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{4}{5}$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow 5x - 4 = 4 - 5x \Leftrightarrow 10x = 8 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$ (nhận)

+ Nếu $5x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{4}{5}$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow -(5x - 4) = 4 - 5x \Leftrightarrow 4 - 5x = 4 - 5x$ (luôn đúr $\forall x < \frac{4}{5}$)

Đáp số $x \leq \frac{4}{5}$

Bài 3. Giải các phương trình

a) $|x| = x^2 + x - 2$ (1) b) $2|x^2 + 2x - 5| = x - 1$ (2)

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x = x^2 + x - 2 \end{cases} (*) \\ \begin{cases} x < 0 \\ -x = x^2 + x - 2 \end{cases} (**) \end{array}\right.$

Xét hệ (*): (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Xét hệ (**): (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{3}$

Đáp số: $x = \sqrt{2}; -1 - \sqrt{3}$

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2(x^2 + 2x - 5) = x - 1 \end{cases} (*) \\ \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2(x^2 + 2x - 5) = -(x - 1) \end{cases} (**) \end{array}\right.$

Xét hệ (*): (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 + 3x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \\ x = -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Xét hệ (**): (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2 + 5x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = \frac{-5 \pm \sqrt{113}}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-5 + \sqrt{113}}{4}$

Đáp số: $x = \frac{3}{2}; \frac{-5 + \sqrt{113}}{4}$

Bài 4. Giải các phương trình:

a) $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 2 - x$ (1) b) $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$ (2)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 3x^2 - 9x + 1 = (2-x)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

b) (2) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 3x + 1 = \left(1 + \sqrt{x+4}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 0 \\ 3x + 1 = 1 + x + 4 + 2\sqrt{x+4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \sqrt{x+4} = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq 2 \\ x + 4 = (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Bài 5. Tìm m để phương trình $x^4 - 3x^2 + m - 1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt, có đúng ba nghiệm.

Giải

Đặt $y = x^2$; $y \geq 0$. Ta có phương trình

$$y^2 - 3y + m - 1 = 0 \qquad (*)$$

a) Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4m + 4 > 0 \\ m - 1 > 0 \\ 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{13}{4} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{13}{4}$$

b) Điều kiện cần: Phương trình (*) có một nghiệm $y = 0 \Rightarrow m = 1$

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, ta có phương trình

$$y^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 0 \\ y = 3 > 0 \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình đã cho có đúng ba nghiệm: $x = 0; \pm\sqrt{3}$

(Bạn đọc có thể tự giải bài toán: Tìm m để phương trình đã cho c đúng hai nghiệm; có đúng một nghiệm hoặc vô nghiệm).

Bài 6. Giải các phương trình

a) $(x + 1)^4 + (x - 3)^4 = 82$ (1) b) $(x - 8)^4 + (x - 6)^4 = 16$ (2)

Giải

Phương trình dạng: $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Đặt ẩn phụ: $y = \dfrac{x + a + x + b}{2}$, ta có thể đưa về phương trình trùng phương.

a) Đặt $y = \dfrac{x + 1 + x - 3}{2} \Leftrightarrow y = x - 1$

Ta có $x = y + 1$. Thế vào (1), ta được:

$$(y + 2)^4 + (y - 2)^4 = 82 \Leftrightarrow y^4 + 24y^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y^2 = 1 \ \text{(nhận)} \\ y^2 = -25 \ \text{(loại)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = \pm 1. \text{ Vậy } x = 0; 2$$

b) Đặt $y = \dfrac{x - 8 + x - 6}{2} \Leftrightarrow y = x - 7$

Ta có: $x = y + 7$. Thế vào (2), ta được:

$$(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16 \Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y^2 = 1 \ \text{(nhận)} \\ y2 = -7 \ \text{(loại)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = \pm 1. \text{ Vậy } x = 8; 6.$$

Bài 7. Giải các phương trình:

a) $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$ (1) b) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$ (2

Giải

Các phương trình trên gọi là phương trình hồi quy bậc bốn có dạng:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + \alpha bx + a\alpha^2 = 0$$

Cách giải: Chia hai vế phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$a\left(x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{\alpha}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $y = x + \dfrac{\alpha}{x}$, ta đưa về phương trình bậc hai

a) Vì $x = 0$ không là nghiệm của (1), nên ta chia hai vế phương trìn (1) cho $x^2 \neq 0$, ta được:

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 10 = 0$ $(x \neq 0)$

Đặt $y = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$. Điều kiện $\Delta = y^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow |y| \geq 2$

Ta có phương trình: $y^2 + y - 12 = 0 \begin{bmatrix} y = -4 \\ y = 3 \end{bmatrix}$

* $x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$

* $x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) Vì $x = 0$ không là nghiệm của (2). Nên ta chia hai vế phương trình (2) cho $x^2 \neq 0$, ta được:

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{2}{x}\right) = 2 = 0$$

Đặt $y = x - \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 - yx - 2 = 0$ (phương trình có nghiệm $\forall y$ vì a và c khác dấu).

Ta có phương trình: $y^2 + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = -1 \\ y = -2 \end{bmatrix}$

• $x - \frac{2}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = -2 \end{bmatrix}$

• $x - \frac{2}{x} = -2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$

§4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

II/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là: $ax + by = c$ (1) trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a, b không đồng thời bằng 0.

Phương trình bậc nhất hai ẩn luôn luôn có vô số nghiệm.

Biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình (1) là một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

2. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

trong đó x, y là hai ẩn; các chữ còn lại là hệ số.

Nếu cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (2).

Giải hệ phương trình (2) là tìm tập nghiệm của nó.

Kí hiệu: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$; $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

- Nếu $D \neq 0$ hệ (2) có nghiệm duy nhất: $x = \frac{D_x}{D}$; $y = \frac{D_y}{D}$
- Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ (hoặc $D_y \neq 0$): hệ (2) vô gnhiệm.
- Nếu $D = D_x = D_y = 0$: hệ (2) có vô số nghiệm.

3. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn:

Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \qquad (3)$$

trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số.

Mỗi bộ ba số $(x_0; y_0; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (3).

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

Giải

a) Ta có $D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -45 + 28 = -17$; $D_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = -27 + 32 = 5$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 21 = 19$$

Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = \left(-\frac{5}{17}; -\frac{19}{17}\right)$

b) Ta có: $D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 5 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{6} + 5$; $D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$D_y = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 5 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2$$

Vậy hệ có nghiệm: $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5 + \sqrt{6}}; \frac{-2}{5 + \sqrt{6}} \right)$ hay

$$(x; y) = \left(\frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{19}; \frac{2\sqrt{6} - 10}{19} \right)$$

c) Ta có: $D = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$; $D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

Vậy $D = D_x = D_y = 0$; hệ có vô số nghiệm.

Bài 2. Giải và biện luận các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx + y = 2m + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx - y + 1 = 0 \\ x + my + 2 = 0 \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3m & m \\ 2m+1 & 1 \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m = 2m(1 - m)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3m \\ m & 2m+1 \end{vmatrix} = -3m^2 + 2m + 1 = (3m + 1)(1 - m)$$

+ Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hệ có nghiệm duy nhất: $(x; y) = \left(\frac{2m}{m+1}; \frac{3m+1}{m+1} \right)$

+ Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

• Khi $m = 1$. Ta có $D_x = D_y = 0$. Vậy hệ có vô số nghiệm.

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3 - x \end{cases}$$

• Khi $m = -1$. Ta có: $D_x = -4$. Vậy hệ vô nghiệm.

b) Hệ được viết lại thành: $\begin{cases} mx - y = -1 \\ x + my = -2 \end{cases}$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 1$; $D_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & m \end{vmatrix} = -m - 2$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2m + 1$$

Vì $D = m^2 + 1 \neq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$, nên hệ có nghiệm duy nhất:

$$(x; y) = \left(\frac{-m-2}{m^2+1}; \frac{-2m+1}{m^2+1}\right)$$

Bài 3. a) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases}$

b) Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để hệ sau có nghiệm duy nhất và nghiệm đó là số nguyên:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

Giải

a) Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

b) Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$; $D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 1$$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m-2}{m^2-1} \\ y = \dfrac{2m-1}{m^2-1} \end{cases}$

Nếu $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ thì $x + y \in \mathbb{Z}$

Ta có: $x + y = \dfrac{3(m-1)}{m^2-1} = \dfrac{3}{m+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = 1 \\ m+1 = -1 \\ m+1 = 3 \\ m+1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \\ m = 2 \\ m = -4 \end{cases}$

Thử lại: + $m = 0 \Rightarrow (x; y) = (2; 1)$

+ $m = -2 \Rightarrow (x; y) = \left(\frac{-4}{3}; \frac{-5}{3}\right)$

+ $m = 2 \Rightarrow (x; y) = (0; 1)$

+ $m = -4 \Rightarrow (x; y) = \left(-\frac{2}{5}; -\frac{3}{5}\right)$

Đáp số: $m = 0; 2$.

Bài 4. a) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất và thỏa mãn điều kiện $x > 0$ và $y > 0$: $\begin{cases} mx + 4y = 6 \\ x + my = 3 \end{cases}$

b) Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất và thỏa mãn điều kiện: $x < 0; y < 0$: $\begin{cases} 3x - 6y = 1 \\ 5x - my = 2 \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $D = m^2 - 4$; $D_x = 6m - 12$; $D_y = 3m - 6$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

Hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{6}{m+2} \\ y = \dfrac{3}{m+2} \end{cases}$

Điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Đáp số: $m > -2$ và $m \neq 2$

b) Ta có: $D = 30 - 3m$; $D_x = 12 - m$; $D_y = 1$

Khi $D \neq 0 \Leftrightarrow 30 - 3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 10$

Hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{12-m}{30-3m} \\ y = \dfrac{1}{30-3m} \end{cases}$

Điều kiện $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12-m}{30-3m} < 0 \\ \dfrac{1}{30-3m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30 - 3m < 0 \\ 12 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 10 \\ m < 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 10 < m < 12$

Bài 5. Cho hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$

Có nghiệm. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

Giải

Nếu a; b và c $\neq 0$. Ta có: $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ac^2x + bc^2y = c^3 \\ ba^2x + ca^2y = a^3 \\ cb^2x + ab^2y = b^3 \end{cases}$

Cộng vế với vế ba phương trình ta được:

$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(ax + by) + bc(bx + cy) + ac(cx + ay)$$
$$= abc + abc + abc = 3abc$$

Vậy $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

* Nếu $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ Ta có hệ: $\begin{cases} by = c \\ bx + cy = 0 \\ cx = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{c}{b} \\ x = \dfrac{b}{c} \\ bx + cy = 0 \end{cases}$

Từ đó: $\dfrac{b^2}{c} + \dfrac{c^2}{b} = 0 \Rightarrow b^3 + c^3 = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 0$

Các trường hợp khác, chứng minh tương tự:

* Nếu a = b = c = 0. Đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng

Bài 6. Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Giải

Xét hệ: $\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$

$$D = m^2 - 1;\ D_x = m - 1;\ D_y = m - 1$$

• Nếu $m \neq \pm 1$, ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{m+1} \\ y = \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$

Thế (x; y) vào phương trình: x + y = 1, ta được:

$$\frac{2}{m+1} = 1 \Leftrightarrow m = 1 \text{ (loại)}$$

- Nếu m = 1, cả ba phương trình trở thành: x + y = 1

  Vậy hệ luôn luôn có vô số nghiệm.
- Nếu m = −1. Hệ trên vô nghiệm.

  Đáp số: m = 1

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = (x - 2y + 1)^2 + (2x + my + 5)^2$

Giải

Ta có: $P \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + my + 5 = 0 \end{cases}$ (*)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m + 4$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$. Hệ (*) luôn có nghiệm duy nhất.

  Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 0, đạt được tại các giá trị (x; y) là nghiệm của hệ (*).
- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = -4$ Khi đó:

  $P = (x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2$

  Đặt t = x − 2y + 1, ta có:

$$P = t^2 + (2t + 3)^2 = 5t^2 + 12t + 9 = \left(\sqrt{5}t + \frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{5}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow x - 2y + 1 = -\frac{6}{5}$

Đáp số: $m \neq -4$: giá trị nhỏ nhất của P là 0

$m = -4$: giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{5}$.

§5. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

II/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai. Có thể giải bằng phương pháp thế.
2. Hệ đối xứng loại một

$\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{cases}$ ở đó: $f(x; y) = f(y; x)$ và $g(x; y) = g(y; x)$

Đặt ẩn phụ: $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$

Ta đưa về hệ đơn giản hơn.

3. Hệ đối xứng loại hai

$$\begin{cases} f(x;y) = 0 \\ f(y;x) = 0 \end{cases}$$

Ta thường trừ vế cho vế hai phương trình, ta đươc $(x \quad y)\, g(x; y) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y = 0 \\ g(x;y) = 0 \end{bmatrix}$ trong trường hợp $g(x; y) = 0$, ta thường cộng vế với vế hai phương trình đã cho để đưa về hệ đối xứng loại một.

3. Hệ đẳng cấp dạng: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$

Nếu $x \neq 0$, ta đặt $y = kx$ và thế vào hệ. Sau đó chia vế cho vế hai phương trình, ta được phương trình theo k.

Nếu $x = 0$, thay vào hệ.

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 & (1) \\ 3x^2 - y^2 + 2y = 4 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 4 & (1) \\ x^2 + 4y^2 = 8 & (2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 & (1) \\ x^2 - xy = 24 & (2) \end{cases}$

Giải

a) Từ (1) $\Rightarrow x = \dfrac{5 - 3y}{2}$. Thế vào (2), ta được:

$$3\left(\frac{5 - 3y}{2}\right)^2 - y^2 + 2y = 4 \Leftrightarrow 23y^2 - 82y + 59 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 1 \\ y = \dfrac{59}{23} \end{bmatrix}$$

Hệ có hai nghiệm: $(1; 1)$; $\left(-\dfrac{31}{23}; \dfrac{59}{23}\right)$

b) Từ (1) $\Rightarrow x = 4 - 2y$. Thế vào (2), ta được:

$(4 - 2y)^2 + 4y^2 = 8 \Leftrightarrow 8y^2 - 16y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Hệ có nghiệm: $(x; y) = (2; 1)$

c) Từ (1) $\Rightarrow x = \dfrac{1+3y}{2}$. Thế vào (2), ta được:

$$\left(\frac{1+3y}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+3y}{2}\right)y = 24 \Leftrightarrow 3y^2 + 4y - 95 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 5 \\ y = -\dfrac{19}{3} \end{array}\right.$$

Hệ có hai nghiệm: $(8; 5)$; $\left(-9; -\dfrac{19}{3}\right)$

Bài 2. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ x^2 - y^2 + 2x = 2 & (2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = m & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

Giải

a) Từ (1) $\Rightarrow y = m - x$. Thế vào (2), ta được:

$$x^2 - (m - x)^2 + 2x = 2 \Leftrightarrow 2(m + 1)x = m^2 + 2 \ (*)$$

Nếu $m = -1$: (*) $0x = 3$ (vô nghiệm)

Nếu $m \neq -1$: $(*) \Leftrightarrow x = \dfrac{m^2 + 2}{2(m + 1)}$

Khi đó: $y = m - \dfrac{m^2 + 2}{2(m + 1)} = \dfrac{m^2 + 2m - 2}{2(m + 1)}$

Đáp số: + $m = -1$. Hệ vô nghiệm

+ $m \neq -1$. Hệ có nghiệm $\left(\dfrac{m^2 + 2}{2(m + 1)}; \dfrac{m^2 + 2m - 2}{2(m + 1)}\right)$

b) Từ (1) $\Rightarrow y = x - m$. Thế vào (2), ta được:

$$x^2 + (x - m)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \ (*)$$

Xét phương trình (*): $+ \Delta' = -m^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 2 \Leftrightarrow |m| < \sqrt{2}$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt: $x = m \pm \sqrt{2 - m^2}$

Hệ có hai nghiệm $\left(m + \sqrt{2 - m^2}; \sqrt{2 - m^2}\right)$; $\left(m - \sqrt{2 - m^2}; -\sqrt{2 - m^2}\right)$

$+ \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$

$m = \sqrt{2}$: hệ có nghiệm: $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$m = -\sqrt{2}$: hệ có nghiệm: $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$+ \Delta' < 0 \Leftrightarrow |m| > \sqrt{2}$. Hệ vô nghiệm.

Bài 3. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = 61 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$

Giải

a) Đặt $S = x + y$; $P = x.y$. Ta có: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$

Ta có hệ: $\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 - 2(5 - S) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ S^2 - 2S - 15 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = 5 - S \\ \left[\begin{array}{l} S = -5 \\ S = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = -5 \\ P = 10 \end{cases} \\ \begin{cases} S = 3 \\ S = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

+ Ta có hệ: $\begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 10 \end{cases}$

Theo định lí Viét x; y là nghiệm phương trình:

$X^2 + 5X + 10 = 0$ (vô nghiệm)

Ta có hệ: $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$

Theo định lí Viét x; y là nghiệm phương trình:

$$Y^2 - 3Y + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Y = 1 \\ Y = 2 \end{array}\right.$$

Hệ có hai nghiệm: (1; 2); (2; 1)

b) Ta có: $x^3 + y^2 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2 - 3xy = 1 - 3xy$

Ta có hệ: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 1 - 3xy = 61 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -20 \end{cases}$

Theo định lí Viét x; y là nghiệm phương trình:

$$X^2 - X - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 5 \\ X = -4 \end{array}\right.$$

Hệ có hai nghiệm: (5; −4); (−4; 5)

c) Đặt $S = x + y$; $P = xy \Rightarrow x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = S^2 - 2P$

Ta có hệ: $\begin{cases} S + P = 5 \\ S^2 - P = 7 \end{cases}$

Cộng vế với vế ta được: $S^2 + S = 12 \Leftrightarrow S^2 + S - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = -4 \\ S = 3 \end{array}\right.$

• $S = -4 \Rightarrow P = 9$. Ta có hệ: $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 9 \end{cases}$

Theo định lý Viét x, y là nghiệm phương trình:

$X^2 + 4X + 9 = 0$ (vô nghiệm)

• $S = 3 \Rightarrow P = 2$

Ta có hệ: $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ giải hệ này, ta được các nghiệm: (1; 2); (2; 1)

i 4. a) Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = 3 - 2m \end{cases}$

) Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$

Giải

a) Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$

Theo định lý Viét x, y là nghiệm phương trình: $X^2 - SX + P = 0$

Điều kiện có nghiệm là $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0$

Ta có hệ: $\begin{cases} S + P = m \\ S^2 - 2P = 3 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S \\ S^2 - 2(m - S) = 3 - 2m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S \\ S^2 + 2S - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 1 \\ P = m - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} S = -3 \\ P = m + 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

• $\begin{cases} S = 1 \\ P = m - 1 \end{cases}$. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4(m - 1) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{4}$

• $\begin{cases} S = -3 \\ P = m + 3 \end{cases}$. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow 9 - 4(m + 3) \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{4}$

Vậy điều kiện của m là $m \leq \dfrac{5}{4}$

) Ta có: $\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ (x + y)^2 - 2xy = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ 36 - 2xy = m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \dfrac{36 - m}{2} \end{cases}$$

Theo định lý Viét x, y là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - 6X + \frac{36 - m}{2} = 0 \ (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 9 - \frac{36 - m}{2} \geq 0$

$\Leftrightarrow m - 18 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 18$. Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq 18$

Bài 5. Tìm m để hệ sau có nghiệm duy nhất:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y + xy = m \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1 + m) \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases}$

Giải

a) Điều kiện cần: giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũ là một nghiệm của hệ.

Điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $y_0 = x_0$.

Thế vào hệ, ta được: $\begin{cases} 2x_0^2 = m \\ 2x_0 + x_0^2 = m \end{cases}$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được: $x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Nếu $x_0 = 0 \Rightarrow m = 0$; nếu $x_0 = 2 \Rightarrow m = 8$

Điều kiện đủ:

• Với m = 0 ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x + y + xy = 0 \end{cases}$

vì $x^2 \geq 0; y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 0$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 0$

Khi đó x = y = 0 thỏa mãn phương trình x + y + xy = 0

Vậy m = 0, hệ có nghiệm duy nhất.

• Với m = 8 ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y + xy = 8 \end{cases}$

Giải hệ này, ta tìm được nghiệm duy nhất (2; 2)

Vậy m = 8, hệ có nghiệm duy nhất.

Đáp số: m = 0; 8

b) Điều kiện cần: giả sử $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũ là một nghiệm của hệ.

Điều kiện cần để hệ có nghiệm duy nhất là $y_0 = x_0$. Thế vào hệ, ta đượ

$$\begin{cases} 2x_0^2 = 2(1 + m) \\ 4x_0^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x_0^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 0$$

Điều kiện đủ: với m = 0. Ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x + y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = \pm 2 \end{cases}$

Ta có hai hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$ (I); $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = -2 \end{cases}$ (II)

Hệ (I) cho ta nghiệm (1; 1); hệ (II) cho ta nghiệm (–1; –1)

Khi m = 0 hệ đã cho không có nghiệm duy nhất.

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn điều kiện bài toán.

ài 6. Cho hai số $a \neq 0$; $y \neq 0$ thỏa mãn $(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy$. **Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức** $m = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

(Đề thi đại học, cao đẳng khối A – 2006)

Giải

Đặt $\frac{1}{x} = u$; $\frac{1}{y} = v$ $(u, v \neq 0)$

Ta có thể viết điều kiện đã cho dưới dạng: $u + v = u^2 + v^2 - uv$

Xét bài toán: Tìm m để hệ: $\begin{cases} u + v = u^2 + v^2 - uv \\ u^3 + v^3 = m \end{cases}$ có nghiệm

Đặt $S = u + v$, $P = uv$. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$, $u^3 + v^3 (u + v)(u^2 + v^2 - uv)$

Ta có hệ: $\begin{cases} S = S^2 - 3P \\ S(S^2 - 3P) = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = S^2 - 3P \\ S^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = \pm\sqrt{m} \\ P = \dfrac{m - \sqrt{3}}{3} \\ m > 0 \end{cases}$

• $S = \sqrt{m}$. Xét điều kiện: $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4\dfrac{m - \sqrt{m}}{3} \geq 0 \\ m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 4\sqrt{m} \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 16$

Vậy giá trị lớn nhất của m bằng 16.

Dấu "=" xảy ra khi $u = v = 2 \Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$

• $S = -\sqrt{m} \Rightarrow P = \dfrac{m + \sqrt{m}}{3}$

Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow m - 4\dfrac{m + \sqrt{m}}{3} \geq 0 \Leftrightarrow -m - 4\sqrt{m} \geq 0$ **(vô** nghiệm vì $m > 0$).

Bài 7.

a) $\begin{cases} x^2 = 3x - 4y (*) \\ y^2 = 3y - 4x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y (*) \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3 = 2x + y (*) \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

Giải

a) Trừ từng vế hai phương trình, ta được:

$$x^2 - y^2 = 7(x - 7) \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 7) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{array}\right.$$

- Trường hợp 1:

$x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$. Thế vào (*) ta được: $x^2 = -x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm: (0; 0); (−1; −1)

- Trường hợp 2:

$x + y - 7 = 0 \Leftrightarrow y = 7 - x$. Thế vào (*) ta được:

$x^2 = 3x - 4(7 - x) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 28 = 0$ (vô nghiệm)

b) Trừ từng vế hai phương trình, ta được:

$$x^3 - y^3 = -5(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + 5 = 0 \end{array}\right.$$

- Trường hợp 1:

$x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$. Thế vào (*), ta được: $x^3 = 11x$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{11} \end{array}\right.$$

Hệ có nghiệm: (0; 0); $(\sqrt{11}; \sqrt{11})$;$(-\sqrt{11}; -\sqrt{11})$

- Trường hợp 2:

$x^2 + xy + y^2 + 5 = 0$ (**)

Ta coi đây là phương trình bậc hai của x. Ta có:

$\Delta = y^2 - 4(y^2 + 5) = -3y^2 - 20 < 0, \forall y \in \mathbb{R}$.

Vậy (**) vô nghiệm.

c) Trừ từng vế hai phương trình, ta được:

$$x^3 - y^3 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right.$$

- Trường hợp 1: $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$. Thế vào (*) ta được:

$$x^3 = 3xy \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Hệ có nghiệm: (0; 0); ($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$);(– $\sqrt{3}$;– $\sqrt{3}$)

• Trường hợp 2: $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$

Cộng vế với vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$x^3 + y^3 = 3(x + y)$$

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 = 3(x + y) \end{cases}$

Đặt $S = x + y$; $P = xy$. Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$

Ta có hệ: $\begin{cases} S^2 - P - 1 = 0 & (1) \\ S^3 - 3SP = 3S & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow P = S^2 - 1$. Thế vào (2) ta được:

$$S^3 - 3S(S^2 - 1) = 3S$$

$$\Leftrightarrow S^3 - 3S^3 + 3S = 3S \Leftrightarrow -2S^3 = 0 \Leftrightarrow S = 0$$

+ Nếu $S = 0 \Rightarrow P = -1$

Ta có hệ: $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1 \end{cases}$

Giải hệ, ta được các nghiệm: (1; –1); (–1; 1)

Đáp số: (0; 0); (1; –1); (–1; 1); ($\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$);(– $\sqrt{3}$;– $\sqrt{3}$)

Bài 8. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất. $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = mx + y (*) \\ y^2 - 2x^2 = my + x \end{cases}$

Giải

* Điều kiện cần: Nếu $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x_0 = y_0$. Thế $y_0 = x_0$ vào (*), ta được:

$$x_0^2 + (m + 1)x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -m - 1 \end{cases}$$

Vì hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow -m - 1 = 0 \Leftrightarrow m - 1$

* Điều kiện đủ: với $m = -1$. Hệ có dạng: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -x + y \\ y^2 - 2x^2 = -y + x \end{cases}$

Cộng từng vế 2 phương trình, ta được: $x^2 + y^2 = 0$. Phương trình có nghiệm duy nhất: $x = 0$; $y = 0$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (0; 0). Kết luận: $m = -1$

Bài 9. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 - = 13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x - y) = 2 \end{cases}$

Giải

a) Với $x = 0$. Thay vào hệ, ta được: $\begin{cases} y^2 = -1 \\ 3y^2 = 13 \end{cases}$ **(vô nghiệm)**

Với $x \neq 0$. Đặt $y = kx$. Hệ có dạng:

$$\begin{cases} x^2 - 3kx^2 + k^2x^2 = -1 \\ 3x^2 - kx^2 + 3k^2x^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 - 3k + k^2) = -1 \\ x^2(3 - k + 3k^2) = 13 \end{cases}$$

Chia 2 vế cho vế hai phương trình, ta được:

$$\frac{3k^2 - k + 3}{k^2 - 3k + 1} = -13 (k^2 - k + 1 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \text{(không thỏa điều kiện } k^2 - 3k + 1 \neq 0)$$

* Với $k = 2$, ta tìm được $x = \pm 1$. Vậy hệ có nghiệm: (1; 2); (–1; –2)

* Với $k = \frac{1}{2}$, ta tìm được $x = \pm 2$. Vậy hệ có nghiệm: (2; 1); (–2; –1)

Với $x = 0$. Hệ vô nghiệm.

Với $x \neq 0$. Đặt $y = kx$. Thay vào hệ, ta được: $\begin{cases} x^3(1 - k^3) = 7 \\ x^3k(1 - k) = 2 \end{cases}$

Chia vế cho vế hai phương trình, ta được:

$$\frac{1 + k + k^2}{2} = \frac{7}{2} \quad k \neq 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa điều kiện } k \neq 0)$$

Với $k = 2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$

Hệ có nghiệm (–1; –2)

Với $k = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$

Hệ có nghiệm (2; 1)

* Cách khác: Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}(x-y)(x^2+xy+y^2)=7\\ xy(x-y)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^3+3(x-y)xy=7\\ xy(x-y)=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^3=1\\ xy(x-y)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=1\\ xy=2\end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm: (–1; –2); (2; 1)

* *Chú ý*: Có thể giải cách khác như sau:

Đặt x – y = u; xy = v ta có hệ đối xứng loại 1 hoặc chia từng vế hai phương trình ta được:

$$\frac{x^2+xy+y^2}{xy}=\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5xy+2y^2=0.$$

Từ đây tìm $x = 2y$; $x = \frac{y}{2}$ và thế một phương trình, ta tìm được nghiệm.

Bài 10. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2y(x^2-y^2)=3y & (1)\\ x(x^2+y^2)10y & (2)\end{cases}$

Giải

+ Trường hợp x = 0. Từ (2) y = 0 có nghiệm (0; 0).

+ Trường hợp $x \neq 0$. Từ (2) suy ra $y \neq 0$.

Chia từng vế (1) và (2) ta được:

$$\frac{2y(x^2-y^2)}{x(x^2+y^2)}=\frac{3x}{10y} \Leftrightarrow \frac{2y\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}=\frac{3x}{10y} \qquad (4)$$

Đặt $\frac{y}{x}=t$ dẫn tới $\frac{2t(1-t^2)}{1+t^2}=\frac{3}{10t} \Leftrightarrow 20t^4-17t^2+3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^2=\frac{3}{5}\\ t^2=\frac{1}{4}\end{array}\right.$$

+ Với $t^2=\frac{3}{5} \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{3}{5}}x$. Từ (2) suy ra x.y cùng dấu nên chỉ lấy được $y=+\sqrt{\frac{3}{5}}x$ thay vào (1) ta được:

$$2\sqrt{\frac{3}{5}}x\left(x^2-\frac{3}{5}x^2\right)=3x\ (x\neq 0) \Leftrightarrow 2.\sqrt{\frac{3}{5}}.\frac{2}{5}x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5.\sqrt{15}}}{2}$$

thay vào $y = \sqrt{\frac{3}{5}}x$ ta được $y = \pm \frac{\sqrt{3\sqrt{5}}}{2}$

+ Với $t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}x$. Tương tự như trên chỉ lấy được $y = \frac{1}{2}x$ và dẫn tới kết quả $x = \pm 2$; $y = \pm 1$.

Vậy hệ có các nghiệm là: (0; 0) $\left(\pm\frac{\sqrt{5.\sqrt{15}}}{2}; \pm\frac{\sqrt{3.\sqrt{15}}}{2}\right)$; $(\pm 2; \pm 1)$

Chú ý: Qua cách giải bài toán này, bạn đọc sẽ hiểu tại sao khi giải hệ đẳng cấp, ta thường đặt $x = ky$ (hoặc $y = kx$).

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. Tìm điều kiện của mỗi phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2} = 3\sqrt{2-x} + 1$ b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$

c) $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$ d) $\sqrt{4x-3} = \frac{3x-1}{\sqrt{3x-5}}$

Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq \frac{2}{3}$

c) Điều kiện: $\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$

d) Điều kiện: $\begin{cases} 4x-3 \geq 0 \\ 3x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x > \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$

Bài 2. Tìm m để mỗi cặp phương trình sau tương đương

a) $2x - 4 = 0$ và $m^2(x+1) - 1 = (2-m)x$ (*)

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ và $mx^2 - 2x + m = 0$ (*)

c) $x^2 + mx + 1 = 0$ và $x^2 + x + m = 0$

Giải

a) Ta có: $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Thế $x = 2$ vào phương trình thứ hai, ta được: $3m^2 - 1 = 4 - 2m$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$$

Thử lại:

+ $m = 1$. Ta có $(*) \Leftrightarrow x + 1 - 1 = x \Leftrightarrow 0x = 0$

Phương trình luôn luôn có nghiệm đúng với mọi x.

Vậy hai phương trình không tương đương khi $m = 1$

+ $m = -\dfrac{5}{3}$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{25}{9}(x + 1) - 1 = \left(2 + \dfrac{5}{3}\right)x \Leftrightarrow -8x = -16 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $m = -\dfrac{5}{3}$, hai phương trình tương đương.

b) Ta có: $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

- Với $x = -1$, thế vào $(*)$, ta được: $m + 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$

  Khi đó: $(*) \Leftrightarrow -x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

  Vậy hai phương trình không tương đương.

- Với $x = -2$, thế vào $(*)$, ta được: $4m + 4 + m = 0 \Leftrightarrow 5m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{5}$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow -\dfrac{4}{5}x^2 - 2x - \dfrac{4}{5} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 10x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy hai phương trình không tương đương.

Không có giá trị nào của m làm cho hai phương trình tương đương.

c) + Theo kết quả bài tập 9 (§2, chương III)

- Hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung khi $m = -2$ nhưng $m = -2$, tập nghiệm của hai phương trình khác nhau.

+ Khi hai phương trình cùng vô nghiệm (tập nghiệm là Ø) thì hai phương trình tương đương.

$$\text{Vậy } \begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 4 < 0 \\ \Delta_2 = 1 - 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| < 2 \\ m > \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m < 2$$

Bài 3. Tìm m để hai phương trình phương trình sau tương đương.

$x^2 + 2x - m = 0$ (1) và $2x^2 + mx + 1 = 0$ (2).

Giải

- Trường hợp 1: Nếu hai phương trình đều vô nghiệm thì chúng sẽ tương đương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + m < 0 \\ m^2 - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ |m| < 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} < m < -1.$

- Trường hợp 2: Nếu hai phương trình có nghiệm kép trùng nhau. Phương trình (1) có nghiệm kép: $x = -1$. Phương trình (2) có nghiệm kép: $x = -\dfrac{m}{4}$.

  Ta có: $-\dfrac{m}{4} = -1 \Leftrightarrow m = 4$ (không thỏa)

- Trường hợp 3: Hai phương trình có hai nghiệm phân biệt và bằng nhau $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{m} = \dfrac{-m}{-1}$ (vô nghiệm)

  Đáp số: $-2\sqrt{2} < m < -1$

Bài 4. Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung.

$2x^2 + mx - 1 = 0$; $mx^2 - x + 2 = 0$

Giải

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình. Ta có hệ:

$$\begin{cases} 2x_0^2 + mx_0 - 1 = 0 \\ mx_0^2 - x_0 + 2 = 0 \end{cases}$$

Đặt $y_0 = x_0^2$ ($y_0 \geq 0$). Ta có: $\begin{cases} mx_0 + 2y_0 = 1 \\ -x_0 + my_0 = -2 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ -1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hệ có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{m+4}{m^2+2} \\ y_0 = \dfrac{1-2m}{m^2+2} \end{cases}$$

Điều kiện: $y_0 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{1}{2}$

Vì $x_0^2 = y_0 \Leftrightarrow \left(\frac{m+4}{m^2+2}\right)^2 = \frac{1-2m}{m^2+2} \Leftrightarrow m^3 + 6m + 7 = 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m^2 - m + 7) = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (vì $m^2 - m + 7 = 0$. Vô nghiệm)

Đáp số: $m = -1$.

Bài 5. Cho ba đường thẳng: $2x - y = 4$ (1); $6x + 2y = 7$ (2); $x + 2y = m$ (3)

Tìm m để ba đường thẳng đã cho đồng quy.

Giải

Xét hệ: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (1) và (2) là $A\left(\frac{3}{2}; -1\right)$. Ba đường thẳng đồng quy khi A thuộc đường thẳng (3).

Ta có: $\frac{3}{2} + 2(-1) = m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Bài 6. Giải và biện luận hệ phương trình.

a) $\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 13 & (1) \\ x^2 + 3y^2 = m & (2) \end{cases}$

Giải

a) Ta có: $D = m + 6$; $D_x = 7$; $D_y = 3m - 3$

- Nếu $m + 6 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 6$. Hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\frac{7}{m+6}; \frac{3m-3}{m+6}\right)$
- Nếu $m = -6$; $D_x = 7 \neq 0$. Vậy hệ vô nghiệm.

b) Từ (1) $\Rightarrow x = \frac{13 - 5y}{3}$. Thế vào (2) ta được:

$$\left(\frac{13-5y}{3}\right)^2 + 3y^2 = m \Leftrightarrow 52y^2 - 130y + 169 - 9m = 0 \ (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 468m - 4563 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{39}{4}$

- Nếu $m > \frac{39}{4}$. Hệ có hai nghiệm: $\left(\frac{351 \pm 5\sqrt{\Delta'}}{156}; \frac{65 \pm \sqrt{\Delta}}{52}\right)$
- Nếu $m = \frac{39}{4}$. Hệ có một nghiệm: $\left(\frac{9}{4}; \frac{5}{4}\right)$

• Nếu $m < \frac{39}{4}$. Hệ vô nghiệm.

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |x - y| + y^2 = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Giải

• Nếu $x - y \geq 0 \Rightarrow x \geq y$. Ta có hệ: $\begin{cases} x - y + y^2 = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được $y^2 - 2y = -1 \Leftrightarrow y = 1$

Hệ có nghiệm (3; 1)

• Nếu $x - y < 0 \Rightarrow x < y$. Ta có hệ: $\begin{cases} -x - y + y^2 = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Cộng vế với vế hai phương trình, ta được:

$y^2 + 2y = 7 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 7 = 0 \Leftrightarrow -1 \pm 2\sqrt{2}$

Với $y = -1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 5 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x > y$ (loại)

Với $y = -1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 5 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x > y$ (loại)

Bài 8. Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + 5m - 3$

Có nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 3$

Giải

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 3 \geq 0$ (*)

Khi đó, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (1) \\ x_1x_2 = 5m - 3 & (2) \\ x_1 - 2x_2 = 3 & (3) \end{cases}$

Từ (1) và (3) $\Rightarrow x_1 = \frac{4m + 3}{3}$; $x_2 = \frac{2m - 3}{3}$

Thế vào (2), ta được: $\left(\frac{4m + 3}{3}\right)\left(\frac{2m - 3}{3}\right) = 5m - 3$

$\Leftrightarrow 8m^2 - 51m + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 6 \\ m = \frac{3}{8} \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện (*))

Bài 9. Cho hai phương trình

$x^2 - 2mx + 4m = 0$ (1) và $x^2 - mx + 10m = 0$ (2)

Tìm m để (2) có một nghiệm bằng 2 lần một nghiệm của (1).

Giải

* Điều kiện cần:

Giả sử x_0 là nghiệm của (1), ta có

$$\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + 4m = 0 \\ 4x_0^2 - 2mx_0 + 10m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(x_0 - 1) = 0 \\ x_0^2 - 2mx_0 + 4m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = 1 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

* Điều kiện đủ:

+ với m = 0, hai phương trình trở thành $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

+ với $m = -\frac{1}{2}$. Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 = x_0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 = 2.x_0 \\ x = -\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

Đáp số: $m = 0; m = -\frac{1}{2}$

Bài 10. Giải và biện luận phương trình

$$x^4 - (m + 2)x^2 + m = 0 \qquad (1)$$

Giải

Đặt $y = x^2; y \geq 0$. Ta có phương trình:

$y^2 - (m + 2)y + m = 0$ (*)

$\Delta = (m + 2)^2 - 4m = m^2 + 4$

+ Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4 > 0 \\ m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow y = \dfrac{m + 2 \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}$

Phương trình (1) có bốn nghiệm: $x = \pm\sqrt{\dfrac{m + 2 \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}}$

+ Phương trình (1) có đúng ba nghiệm, nếu (*) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm dương.

Nếu $y = 0 \Rightarrow m = 0$. Ta có: $y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 \end{array}\right.$

Vậy $x = 0;\ \pm\sqrt{2}$

+ Phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm khác dấu (trường hợp (*) có nghiệm kép không xảy ra vì $\Delta = m^2 + 4 > 0$)

$$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow m < 0. \text{ Khi đó } x = \pm\sqrt{\frac{m + 2 \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}}$$

Bài 11. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x^2 - 3x - 1} + 7 = 2x$ (1)

b) $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{4x - 3} = \sqrt{5x + 4}$ (2)

Giải

a) Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x - 1} = 2x - 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 1 = (2x - 7)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{2} \\ x^2 - 3x - 1 = 4x^2 - 28x + 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{2} \\ 3x^2 - 25x + 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{7}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{10}{3} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 5$

b) Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ 4x - 3 \geq 0 \\ 3x + 1 + 4x - 3 + 2\sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} = 5x + 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{4} \\ 2\sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} = 6 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{4} \\ \sqrt{(3x + 1)(4x - 3)} = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{4} \\ 3 - x \geq 0 \\ (3x + 1)(4x - 3) = (3 - x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4} \leq x \leq 3 \\ 11x^2 + x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{4} \leq x \leq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{12}{11} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{12}{11} \end{array}\right.$$

Bài 12. Giải các phương trình:

a) $x^2 - 7\sqrt{x^2+1} + 11 = 0$; b) $x^2 + \sqrt{x^2 - x} = x + 12$

Giải

a) Đặt $y = \sqrt{x^2+1}$; $y \geq 1 \Rightarrow y^2 = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y^2 - 1$

$$y^2 - 7y + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = 5 \\ y = 2 \end{bmatrix}$$

Vậy + $\sqrt{x^2+1} = 5 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 24 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{6}$

+ $\sqrt{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

b) Đặt $y = \sqrt{x^2 - x}$; $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x^2 - x$

Ta có phương trình: $y^2 + y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y = -4 & \text{(loại)} \\ y = 4 & \text{(nhận)} \end{bmatrix}$

Vậy: $\sqrt{x^2 - x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - x = 9 \Leftrightarrow x^2 - x - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

Bài 13. Giải các hệ phương trình sau: a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x \ (*) \\ 2x^2 + xy = 3y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7 \end{cases}$

Giải

a) Đặt $u = x^2 \geq 0$; $v = y^2 \geq 0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 - uv + v^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ (u+v)^2 - 3uv = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 4 \end{cases}$

Dễ thấy hệ này có nghiệm (1; 4); (4; 1)

Đáp số: Vậy hệ đã cho có nghiệm:

(1; 2); (1; –2); (2; 1); (–2; 1); (–2; –1); (–1; 2); (2; –1) (–1; –2)

b) Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được: $2(x^2 - y^2) = 3(x - y)$

$$\Leftrightarrow (x - y)(2x + 2y - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y = 0 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{bmatrix}$$

• Trường hợp 1: $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$. Thế vào (*), ta được:

$$3x^2 = 3x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

Hệ có nghiệm: (0; 0); (1; 1)

• Trường hợp 2: $2x + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{3-2x}{2}$. Thế vào (*), ta được:

$$2x^2 + x\frac{3-2x}{2} = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Hệ có nghiệm: $\left(0;\frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2};0\right)$

Đáp số: (0; 0); (1; 1); $\left(0;\frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2};0\right)$

c) Ta thấy $x = 0$ không thỏa phương trình thứ nhất của hệ.

Nên giả sử $x \neq 0$. Đặt $y = kx$. Thế vào hệ, ta được:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2(2 - 4k + k^2) = -1 (*) \\ x^2(3 + 2k + 2k^2) = 7 \end{array}\right.$$

Chia vế cho vế hai phương trình, ta được: $\dfrac{2-4k+k^2}{3+2k+2k^2} = \dfrac{-1}{7}$

$$\Leftrightarrow 9k^2 - 26k + 17 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = \dfrac{17}{9} \end{array}\right.$$

+ Với $k = 1$. Thế vào (*) ta được: $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Hệ có nghiệm: (1; 1); (–1; –1)

+ Với $x = \dfrac{17}{9}$. Thế vào (*) ta được: $\dfrac{161}{81}x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{81}{161}$

$$x = \pm \frac{9}{\sqrt{161}}$$

Hệ có nghiệm: $\left(\frac{9}{\sqrt{161}};\frac{17}{\sqrt{161}}\right); \left(-\frac{9}{\sqrt{161}};-\frac{17}{\sqrt{161}}\right)$

Bài 14. Tìm m để hệ sau có nghiệm: $\left\{\begin{array}{ll} x^2 - 4xy + y^2 = m & (1) \\ y^2 - 3xy = 4 & (2) \end{array}\right.$

Giải

Ta thấy $y = 0$ không thỏa phương trình (2) nên có thể giả thiết rằng $\neq 0$. Ta có:

(2) $\Leftrightarrow x = \dfrac{-\left(4-y^2\right)}{3y}$. Thế x vào (1), ta được:

$$\left(\frac{y^2-4}{3y}\right)^2 - 4\left(\frac{y^2-4}{3y}\right)y + y^2 = m \Leftrightarrow 2y^4 + (9m-40)y^2 - 16 = 0$$

Đặt $z = y^2$; $z \geq 0$. Ta có phương trình $2z^2 + (9m - 40)z - 16 = 0$

Phương trình luôn có hai nghiệm khác dấu (vì A = 2; C = −16; khác dấu), nén luôn có một nghiệm $z > 0$, từ đó luôn tìm được y, $\forall m$.

Vậy hệ luôn có nghiệm $\forall m$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

. Điều kiện xác định của phương trình: $\frac{2x}{x^2-4} = \sqrt{1-x}$ là:

A. $x > 1$ và $x \neq \pm 2$ B. $x < 1$ và $x \neq 2$

C. $x < 1$ và $x \neq \pm 2$ D. $x \leq 1$ và $x \neq -2$

. Phương trình $(m-2)^2x = m(1-4x) + 8x + 2$ có nghiệm duy nhất khi:

A. $m \neq 2$ B. $m \neq 2$ và $m \neq 6$

C. $m \neq \pm 2$ D. $m \neq -2$

. Hệ phương trình $\begin{cases} x + mx = 3m \\ mx + y = 2m + 1 \end{cases}$. Có nghiệm duy nhất khi:

A. $\forall m \in \mathbb{R}$ B. $m = 1$ C. $m = \pm 1$ D. $m = -1$

. Phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm kép khi:

A. $m \in \{0; 1\}$ B. $m \in \{0; 4\}$

C. $m \in \{1; 4\}$ D. $m \in \{0; 1\}$

. Tìm m để phương trình: $x^2 + 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \neq \pm 2$ B. $m \geq 2$ C. $|m| \leq 3$ D. $|m| \geq 2$

. Giả sử phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tính $x_1^2 + x_2^2$.

A. $m^2 - 2$ B. $-m^2 - 2$ C. $-m^2 + 1$ D. $m^2 - 1$

. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương x_1, x_2. Tính $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$.

A. $\sqrt{2m+4}$ B. $\sqrt{4-2m}$ C. $\pm\sqrt{4-2m}$ D. $\pm\sqrt{4+2m}$

. Nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$

A. (3; 4); (−4; −3) B. (3; 4); (4; 3)

C. (±3; ±4) D. (3; 4); (4; 3); (−4; −3); (−3; −4)

9. Hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y = 5x \\ 2y^2 + x = 5y \end{cases}$ có số nghiệm là:

A. 3 B. 2 C. 4 D.6

10. Hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ xy + x^2 = 2 \end{cases}$ có số nghiệm là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5.

Đáp án

1. D **2.** C **3.** C
4. C. **5.** D **6.** D
7. A **8.** D **9.** D **10.** A

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm

Các mệnh đề dạng "a < b" hoặc "a > b" được gọi là bất đẳng thức.

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

Nếu mệnh đề "a < b ⇒ c < d" đúng thì ta nói bất đẳng thức c < d
bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức a < b và cũng viết
< b ⇒ c < d.

Nếu bất đẳng thức a < b là hệ quả của bất đẳng thức c < d và ngư
lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là a <
⇔ c < d.

3. Tính chất của bất đẳng thức

Tính chất		*Tên gọi*
Điều kiện	*Nội dung*	
	a < b ⇔ a + c < b + c	Cộng hai vế của bấ đẳng thức với một số

$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của **bất đẳng thức với một số**
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
n nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của **bất đẳng thức lên một lũy thừa**
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

. ***Bất đẳng thức Côsi***

- $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$; $\forall a; b \ge 0$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \dfrac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ có $a = b$.

- Hệ quả 1: $a + \dfrac{1}{a} \ge 2$; $\forall a > 0$
- Hệ quả 2: Nếu x, y cùng dương và tổng không đổi thì tích **xy lớn** nhất khi và chỉ khi $x = y$.
- Hệ quả 3: Nếu x, y cùng dương và tích không đổi thì tổng **x + y nhỏ** nhất khi và chỉ khi $x = y$.

. ***Bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối***

$$|a| - |b| \le |a + b| \le |a| + |b|$$

/ BÀI TẬP

ài 1. Chứng minh các bất đẳng thức

a) $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$: $|ax + by| \le \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$ **(1)**

(Bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki)

b) $\forall a, b \in \mathbb{R}$: $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ **(2)**

c) $\forall a, b, \in \mathbb{R}$: $|a| \le 1$; $|b| \le 1$ thì $|a + b| \le |1 + ab|$ **(3)**

d) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \le \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}$ **(4)**

e) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ **(5)**

f) $\forall a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e)$ **(6)**

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow |ax + by|^2 \le \left(\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$

$\Leftrightarrow a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \le a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2$

$\Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \ge 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \ge 0$

Bất đẳng thức này luôn đúng, $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Ta có: (2) $\Leftrightarrow = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \le \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \ge 0$. Bất đẳng thức này luôn đúng $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

c) Ta có: $|a + b| \le |1 + ab| \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \le 1 + 2ab + a^2b^2$

$\Leftrightarrow 1 + a^2b^2 - a^2 - b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (1 - a^2) - b^2(1 - a^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (1 - a^2)(1 - b^2) \ge 0$

vì $|a| \le 1$ và $|b| \le 1 \Rightarrow a^2 \le 1$ và $b^2 \le 1 \Rightarrow 1 - a^2 \ge 0$ và $1 - b^2 \ge 0$ nên $(1 - a^2)(1 - b^2) \ge 0$ (đpcm)

d) Ta có:

(4) $\Leftrightarrow (a + c)^2 + (b + d)^2 \le a^2 + b^2 + 2.\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2} + c^2 + d^2$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + 2bd + d^2 \le a^2 + b^2 + 2.\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2} + c^2 \cdot$

$\Leftrightarrow ac + bd \le \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$

Bất đẳng thức này luôn đúng vì:

$ac + bd \le |ac + bd| \le \sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{c^2 + d^2}$ (xem chứng minh câu a)

e) (5) $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \ge 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

f) (6) $\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \ge 4a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2d)^2 + (a - 2c)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \ge \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^3$ (1) với $a + b \ge 0$

b) $a^2 + 3(b^2 + c^2 + d^2) \ge 2(ab + ac + ad)$ (2), $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

c) Nếu $a > b > 0$ và $c > \sqrt{ab}$ thì $\dfrac{a + c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \ge \dfrac{b + c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (3)

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{a^3 + b^3}{2} \ge \dfrac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{8}$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a - b) - b^2(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 - b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0$. Bất đẳng thức này luôn đúng vì $(a - b)^2 \geq 0$ và $a - b \geq 0$ (theo giả thiết)

b) Ta có

(2) $\Leftarrow 3a^2 + 9(b^2 + c^2 + d^2) \geq 6(ab + ac + ad)$

$\Leftarrow (a^2 - 6ab + 9b^2) + (a^2 - 6ac + 9c^2) + (a^2 - 6ad + 9d^2) \geq 0$

$\Leftarrow (a - 3b)^2 + (a - 3c)^2 + (a - 3d)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

c) Ta có

(3) $\Leftrightarrow (a + c)\sqrt{b^2 + c^2} \geq (b + c)\sqrt{a^2 + c^2}$ (vì $a > b > 0 \Rightarrow c > \sqrt{ab} > 0$)

$\Leftarrow (a + c)^2(b^2 + c^2) \geq (b + c)^2(a^2 + c^2)$

$\Leftarrow 2ac^3 + 2ab^2c - 2bc^3 - 2a^2bc \geq 0$

$\Leftarrow 2c^3(a - b) - 2abc(a - b) \geq 0$

$\Leftarrow c(a - b)(c^2 - ab) \geq 0$ (luôn đúng vì $c > \sqrt{ab}$ và $a > b > 0$)

$\Rightarrow c^2 - ab \geq 0$; $a - b > 0$ và $c > 0$

ài 3. a) Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và b; d > 0. Chứng minh $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

b) Cho a < b; a, b, m > 0. Chứng minh: $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$

c) Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; b, d > 0. Chứng minh: $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$.

Giải

a) Ta có: $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b + d) < b(a + c)$ (vì b, d > 0)

$\Leftrightarrow ad < bc$ (luôn đúng vì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$).

Chứng minh tương tự: $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

b) Ta có: $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m} \Leftrightarrow a(b + m) < b(a + m)$

$\Leftrightarrow ab + am < ab + bm \Leftrightarrow am < bm \Leftrightarrow a < b$ (luôn đúng)

c) Ta có: $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2}$

$\Leftrightarrow ab^2 + ad^2 < ab^2 + bcd \Leftrightarrow ad^2 - bcd < 0$

$\Leftrightarrow d(ad - bc) < 0$ (luôn đúng vì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$; b. d > 0 $\Rightarrow ad < bc$

$\Rightarrow ad - bc < 0$)

Bài 4. Cho a, b, c > 0. Chứng minh $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Giải

• Ta có: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$; $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$; $\frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$

(vì a > 0; b > 0; c > 0)

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức, ta được:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$$

• Ta có: $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$ (1) (vì b; c > 0 **và theo kết quả bài 3; b)**

Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}$ (2); $\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$ (3)

Cộng vế với vế (1), (2), (3), ta được:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \text{ (đpcm)}$$

Bài 5. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là a, b, c.

Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 < (2(a + bc + ca)$

Giải

Trong tam giác, ta luôn có:

$$|b - c| < a \Rightarrow (b - c)^2 < a^2 \Rightarrow b^2 - 2bc + c^2 < a^2 (1)$$

Tương tự: $c^2 - 2ca + a^2 < b^2$ (2); $a^2 - 2ab + b^2 < c^2$ (3)

Cộng vế với vế (1), (2), (3), ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) < a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

Bài 6. Cho tam giác ABC; có độ dài ba cạnh là a; b; c và $a \geq b \geq c$; độ dà ba đường cao tương ứng với a; b; c là h_a; h_b; h_c.

Chứng minh: $\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \geq \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_c}{h_b}$ (*)

Giải

Ta có: $S = \frac{1}{2} a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$. Tương tự: $h_b = \frac{2S}{b}$; $h_c = \frac{2S}{c}$

(S là diện tích tam giác ABC)

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}$

$\Leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b \geq a^2c + bc^2 + b^2a$

$\Leftrightarrow b^2(c - a) - b(c^2 - a^2) + ac(c - a) \geq 0$

$\Leftrightarrow (c - a)(b^2 - bc - ba + ac) \geq 0 \Leftrightarrow (c - a)(b - c)(b - a) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối cùng là đúng vì $a \geq b \geq c \Rightarrow c - a \leq 0; b - a \leq 0; b - c \geq 0$

Bài 7. a) Cho $ab \geq 1$. Chứng minh: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$ (1)

b) Cho $a \geq 1; b \geq 1; c \geq 1$. Chứng minh: $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} \geq \frac{3}{1+abc}$.

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow (1 + b^2)(1 + ab) + (1 + a^2)(1 + ab) \geq 2((1 + a^2)(1 + b^2)$

$\Leftrightarrow 2 + a^2 + b^2 + 2ab + ab^3 + a^3b \geq 2 + 2a^2 + 2b^2 + 2a^2b^2$

$\Leftrightarrow -a^2 - b^2 + 2ab + ab(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0$

$\Leftrightarrow ab(a - b)^2 - (a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(ab - 1) \geq 0$

Bất đẳng thức này đúng vì $(a - b)^2 \geq 0$; $ab \geq 1 \Rightarrow ab - 1 \geq 0$

b) Theo (1) ta có: $a \geq 1; b \geq 1 \Rightarrow ab \geq 1$

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} \geq \frac{1}{1+\sqrt{a^3b^3}}$$

Tương tự: $\frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \geq \frac{1}{1+\sqrt{abc^4}}$

Vậy $\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \geq 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{1}{1+\sqrt{abc^4}}\right)$

$$\geq 2\frac{2}{1+\sqrt[4]{a^4b^4c^4}} = \frac{4}{1+abc} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 8. a) Cho $a + b = 1$. Chứng minh: $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$

b) Cho $a+ b = 1$. Chứng minh $a^6 + b^6 \geq \frac{1}{32}$

Giải

a) Ta có: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2$ (vì $a + b = 1$)

Lại có: $a + b = 1 \Rightarrow b = 1 - a$

Vậy $a^2 - ab + b^2 = a^2 - a(1 - a) + (1 - a)^2 = 3a^2 - 3a + 1$

$$= 3\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4} \text{ (vì } \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0; \forall a) \Rightarrow a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$$

b) Ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ (*)

Thật vậy: (*) $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Áp dụng (*) đối với $x = a^3$; $y = b^3$, ta có: $a^6 + b^6 \geq \frac{(a^3+b^3)^2}{2}$

Theo trên: $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$ với $a + b = 1 \Rightarrow \frac{(a^3+b^3)^2}{2} \geq \frac{1}{32}$

$\Rightarrow a^6 + b^6 \geq \frac{1}{32}$.

Bài 9. Chứng minh rằng nếu $a + b \geq c$; $c \geq 0$ thì:

a) $a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{8}$ b) $a^8 + b^8 \geq \frac{c^8}{128}$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức (*) ở bài 8, ta có: $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$

Từ giả thiết $a + b \geq c \Rightarrow (a+b)^2 \geq c^2$

Vậy $a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}$. Tương tự: $(a^2)^2 + (b^2)^2 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{c^2}{2}\right)^2}{2}$

$\Rightarrow$ đpcm

b) Áp dụng bất đẳng thức (*) ở bài 8, ta có: $a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 \geq \frac{(a^2+b^2)^2}{2} \geq \frac{c^4}{8}$ và $a^8 + b^8 = (a^4)^2 + (b^4)^2 \geq \frac{(a^4+b^4)^2}{2} \geq \frac{c^8}{128} \Rightarrow$ đpcm

Bài 10. Chứng minh rằng:

a) $|x+1| + |x-3| \geq 4$; $\forall x \in \mathbb{R}$; b) $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 2$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Giải

a) Ta có: $|a| + |b| \geq |a+b|$

$|x+1| + |x-3| = |x+1| + |3-x| \geq |x+1+3-x| = 4$ (đpcm)

b) *Cách 1:* Trường hợp 1: $x < 1$

Ta có: $|x-1| + |x-2| + |x-3| = -x + 1 - x + 2 - x + 3 = 6 - 3x$.

vì $x < 1 \Rightarrow -3x > -3 \Rightarrow 6 - 3x > 3 > 2$

Trường hợp 2: $1 \leq x < 2$

Ta có: $|x-1| + |x-2| + |x-3| = x - 1 - x + 2 - x + 3 = 5 - x$

vì $1 \leq x < 2 \Rightarrow -1 \geq -x \geq -2 \Rightarrow 4 \geq 5 - x > 3 > 2$

Trường hợp 3: $2 \le x < 3$

Ta có $|x-1| + |x-2| + |x-3| = x - 1 + x - 2 - x + 3 = x \ge 2$

Trường hợp 4: $x \ge 3$

$|x-1| + |x-2| + |x-3| = x - 1 + x - 2 + x - 3 = 3(x-2) \ge 3 > 2$

Vậy $\forall x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $|x-1| + |x-2| + |x-3| \ge 2$

(Dấu "=" xảy ra khi $x = 2$)

Cách 2: Ta có: $|a| + |b| \ge |a + b|$

Xét: $|x-1| + |x-2| = |x-1| + |2-x| \ge |x-1+2-x| = 1$

$|x-1 + |x-3| = |x-1| + |3-x| \ge |x-1+3-x| = 2$

$|x-2| + |x-3| = |x-2| + |3-x| \ge |x-2+3-x| = 1$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức, ta được:

$2(|x-1| + |x-2| + |x-3|) \ge 4$

$\Leftrightarrow |x-1| + |x-2| + |x-3| \ge 2$ (đpcm)

Bài 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a) $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 6x + 10}$

c) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

Giải

a) Ta có: $y = |x| + |1-x| \ge |x + 1 - x| = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 1. Dấu "=" xảy ra, chẳng hạn $x = 0$

b) Ta có: $y = \sqrt{(x-1)^2 + 1} + \sqrt{(3-x)^2 + 1}$

Áp dụng bài 1, d): $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$

Ta có: $y \ge \sqrt{(x-1+3-x)^2 + (1+1)^2} \ge 2\sqrt{2}$; khi $x = 2$

Dấu "=" xảy ra, tại $x = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $2\sqrt{2}$; khi $x = 2$

c) Ta có: $y = \frac{1}{2}|x| + |1-x| \ge \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|1-x| \ge \frac{1}{2}|x + 1 - x| = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{1}{2}$, đạt được tại $x = 1$.

Chú ý: Bạn đọc có thể dùng phương pháp vẽ đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{2}|x| + |1-x|$, để tìm gái trị nhỏ nhất của y.

Bài 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |2x + y - 3| + |x + my + 1|$

Giải

Ta có $P \ge 0$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + my + 1 = 0 \end{cases}$ (*)

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m - 1$

+ Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$. Hệ có nghiệm duy nhất.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 0, tại các giá trị (x; y) là nghiệm của hệ (*), với $m \neq \frac{1}{2}$.

+ Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

Ta có: $P = |2x + y - 3| + \left|x + \frac{1}{2}y + 1\right| \geq \frac{1}{2}|2x + y - 3| + \frac{1}{2}|2x + y + 2|$

$$\geq \frac{1}{2}|(3 - 2x - y) + (2x + y + 2)| = \frac{5}{2}$$

Dấu "=" xảy khi chẳng hạn khi x = 1; y = 2

Bài 13. Chứng minh rằng: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$; $\forall x$.

Giải

+ Ta thấy $\forall x \leq 0$ thì $-x^5 \geq 0$ và $-x \geq 0$ nên vế trái dương.

+ Xét $x \in (0; 1)$. Ta có thể viết bất đẳng thức dưới dạng:

$$x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$$

Dễ thấy $1 - x > 0$ và $1 - x^3 > 0$ khi $0 < x < 1$ nên vế trái luôn dương $\forall x \in (0; 1)$

+ Xét $\forall x \geq 1$. Ta có thể viết bất đẳng thức dưới dạng:

$$x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$$

Khi $x \geq 1 \Rightarrow x^3 \geq 1 \Rightarrow x^3 - 1 \geq 0$; $x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0$

Vậy vế trái dương $\forall x \geq 1$

Bất đẳng thức được chứng minh $\forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 14. Chứng minh rằng

a) $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$; $\forall a > 0$; $b > 0$

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$; $\forall a, b, c > 0$

c) $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$; $\forall a, b, c > 0$

Áp dụng..... chứng minh nếu a, b, c > 0 và a + b + c = 1 thì

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\geq\frac{9}{2} \quad (*)$$

Giải

a) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\forall a > 0; b > 0$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

Vì các vế trái đều dương nên nhân vế với vế hai bất đẳng thức trên, ta được:

$$(a + b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4 \text{ (đpcm)}$$

b) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\forall a, b, c > 0$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\frac{1}{\sqrt{ab}}\ (1);\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 2\frac{1}{\sqrt{bc}}\ (2);\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a}\geq 2\frac{1}{\sqrt{ac}}\ (3)$$

Cộng vế với vế (1); (2); (3), ta được:

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 2\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\right)\Rightarrow \text{đpcm}$$

c) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\forall a, b, c > 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} & (1) \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 3\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}} & (2) \end{cases}$$

Vì các vế của (1) và (2) đều dương nên nhân vế với vế (1), (2)

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9\sqrt[3]{abc}.\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\Rightarrow \text{đpcm}$$

Áp dụng:

Ta có: $(*)\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right)\geq 9$

Vì $a + b + c = 1 \Rightarrow 1 - a = b + c; 1 - b = a + c; 1 - c = a + b$

và $2 = (a + b) + (b + c) + (c + a)$

Vậy: $(*)\Leftrightarrow [(a + b) + (b + c) + (c + a)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right]\geq 9$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng (theo bài toán trên)

Bài 15. Cho ΔABC có độ dài ba cạnh a, b, c và p là nửa chu vi: Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{c}{2}$ b) $(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8}$

c) $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Giải

a) Ta có $p-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}>0$ vì $b+c>a$

Tương tự: $p-b>0$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{p-a+p-b}{2}=\frac{2p-a-b}{2}=\frac{c}{2} \text{ (đpcm)}$$

b) Theo bài toán a) ta có:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{c}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{a}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{(p-c)(p-a)} \le \frac{b}{2} \quad (3)$$

Vì các vế của (1), (2), (3) đều dương, nên nhân vế với vế (1), (2), (3), ta được:

$$(p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8} \text{ (đpcm)}$$

c) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \ge 2\frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}$

Theo bài toán a) ta có: $\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{c}{2}$, nên:

$$\frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \ge \frac{2}{c}$$

Vậy $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \ge \frac{4}{c}$ (1)

Tương tự: $\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \ge \frac{4}{a}$ (2)

$$\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a} \ge \frac{4}{b} \quad (3)$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được:

$$2\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 16. a) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = |x|.\sqrt{1-x^2}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $y = (1-x)(1-x^2)\ \forall x \in [-1; 1]$

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$Q = (3-x)(4-y)(2x+3y)$, với $0 \leq x \leq 3$; $0 \leq y \leq 4$

Giải

a) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$|x|.\sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2(1-x^2)} \leq \frac{x^2+1-x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\frac{1}{2}$, đạt được tại $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Ta có: $y = (1-x)(1-x^2) = \frac{(1-x)(1-x)(2+2x)}{2}$

Theo bất đẳng thức Côsi, cho ba số không âm $1-x$; $1-x$; $2+2x$

$$\sqrt[3]{(1-x)(1-x)(2+2x)} \leq \frac{1-x+1-x+2+2x}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1-x)(1-x)(2+2x) \leq \frac{32}{27}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 1-x = 2-2x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \in [-1; 1]$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $\frac{32}{27}$, đạt được tại $x = -\frac{1}{3}$

c) Ta có: $Q = \frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y)$

Theo bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm: $6-2x$; $12-3y$; $2x+3y$, ta có

$$\sqrt[3]{(6-2x)(12-3y)(2x+3y)} \leq \frac{6-2x+12-3y+2x-3y}{3} = 6$$

$$\Rightarrow Q \leq 36$$

Vậy giá trị lớn nhất của Q là 36

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 6-2x = 12-3y = 2x+3y \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

Bài 17. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + \frac{8}{x+1}$; $x > -1$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + \frac{8}{x^2}$ $(x > 0)$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x} + \frac{4}{1-x}$; $0 < x < 1$

Giải

a) Ta có: $y = 2(x + 1) + \frac{8}{x+1} - 2$

Theo bất đẳng thức Côsi, cho hai số $2(x + 1)$ và $\frac{8}{x+1}$

Ta có: $2(x + 1) + \frac{8}{x+1} \geq 2.\sqrt{2(x+1)\frac{8}{x+1}} = 8 \Rightarrow y \geq 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2(x + 1) = \frac{8}{x+1} \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 6, đạt được tại $x = 1$

b) Ta có: $y = 2x + \frac{8}{x^2} = x + x + \frac{8}{x^2}$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có: $x + x + \frac{8}{x^2} \geq \sqrt{x.x\frac{8}{x^2}} = 6$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 6, đạt được tại $x = 2$

c) Ta có: $y = \frac{1-x+x}{x} + \frac{4(x+1-x)}{1-x}$

$$= \frac{1-x}{x} + 1 + 4.\frac{x}{1-x} + 4 = \frac{1-x}{x} + 4.\frac{x}{1-x} + 5$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\frac{1-x}{x} + 4.\frac{x}{1-x} \geq 2.\sqrt{\frac{1-x}{x}.4\frac{x}{1-x}} = 4 \Rightarrow y \geq 9$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{x} = \frac{4x}{1-x} \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2 = 4x^2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của y là 9; đạt được tại $x = \frac{1}{3}$

Bài 18.

a) Cho $4x + y = 1$. Chứng minh rằng $4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$

b) Cho $2x + 3y = 5$. Chứng minh rằng $2x^2 + 3y^2 \geq 5$

Giải

a) *Cách 1*: Từ giả thiết: $4x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 4x$. Ta có

$4x^2 + y^2 = 4x^2 + (1 - 4x)^2 = 20x^2 - 8x + 1$

$= (2\sqrt{5}\,x - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}$ vì $(2\sqrt{5}\,x - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 \geq 0, \forall x \Rightarrow 4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$

Cách 2: Theo bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki, ta có:

$$1 = 4x + y = 2(2x) + 1y \leq \sqrt{2^2 + 1^2}\,.\sqrt{4x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5(4x^2 + y^2)} \geq 1 \Rightarrow 4x^2 + y^2 \geq \frac{1}{5}$$

b) *Cách 1:* Từ giả thiết $\Rightarrow x = \frac{5 - 3y}{2}$

Ta có: $2x^2 + 3y^2 = 2\left(\frac{5 - 3y}{2}\right)^2 + 3y^2 = \frac{15}{2}(y^2 - 2y) + \frac{25}{2}$

$$= \frac{15}{2}[(y - 1)^2 - 1] + \frac{25}{2} \geq -\frac{15}{2} + \frac{25}{2} = 5$$

Vậy $2x^2 + 3y^2 \geq 5$

Cách 2: Theo bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki, ta có

$$5 = 2x + 3y = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}\,x) + \sqrt{3}\,.(\sqrt{3}\,y) \leq \sqrt{2 + 3}\,.\sqrt{2x^2 + 3y^2}$$

$\Rightarrow \sqrt{5}\,\sqrt{2x^2 + 3y^2} \geq 5 \Rightarrow 2x^2 + 3y^2 \geq 5$ (đpcm)

Bài 19.

a) Cho $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh $|5x + 12y| \leq 13$

b) Cho $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6$; $x > 0$; $y > 0$. Chứng minh $x + y \geq \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{6}$

Giải

a) *Cách 1*: Theo bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki, ta có

$$|5x + 12y| \leq \sqrt{5^2 + 12^2}\,.\sqrt{x^2 + y^2} = 13 \text{ (vì } x^2 + y^2 = 1)$$

Cách 2. Đặt $5x + 12y = m \Rightarrow x = \frac{m - 12y}{5}$

Thế x vào đẳng thức $x^2 + y^2 = 1$, ta có

$$\left(\frac{m-12y}{5}\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow 169y^2 - 24my + m^2 - 25 = 0$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -25m^2 + 4225 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \leq 169$

$$\Leftrightarrow |m| \leq 13$$

Vậy $|5x + 12y| \leq 13$

b) *Cách 1*: Theo bất đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki, ta có

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}.\sqrt{x} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{y}}.\sqrt{y}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{y}\right)(x + y)$$

mà $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6 \Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \leq 6(x + y) \Rightarrow x + y \geq \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{6}$

Cách 2: Từ giả thiết $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 6 \Rightarrow x = \frac{2y}{6y - 3}$

($y = \frac{1}{2}$ không thỏa mãn điều kiện bài toán)

Vậy $x + y = \frac{6y^2 - y}{6y - 3}$ Đặt $x + y = m$ $(m > 0)$

Ta có $\frac{6y^2 - y}{6y - 3} = m \Leftrightarrow 6y^2 - (6m + 1)y + 3m = 0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 36m^2 - 60m + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 36\left(m - \frac{5 - 2\sqrt{6}}{6}\right)\left(m - \frac{5 + 2\sqrt{6}}{6}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \frac{5 + 2\sqrt{6}}{6} \\ m \leq \frac{5 - 2\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.$$

(Kết quả này suy ra bằng cách xét trường hợp hai thừa số trong ngoặc cùng không âm hoặc cùng không dương)

Nhưng vì $x = \frac{2y}{6y - 3} > 0$ $y > 0 \Rightarrow y > \frac{1}{2} \Rightarrow x + y > \frac{1}{2}$

mà $\frac{5 - 2\sqrt{6}}{6} < \frac{1}{2}$, nên ta chỉ có $m \geq \frac{5 + 2\sqrt{6}}{6} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2}{6}$

Bài 20. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{6 - x}$

Giải

Tập xác định: $D = [2; 6]$

Ta có: $y^2 = 4 + 2\sqrt{(x - 2)(6 - x)} \geq 4$ vì $\forall x \in [2; 6]$

Thì $\sqrt{(x - 2)(6 - x)} \geq 0$

Vậy $y \geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của y là 2 đạt được tại x = 2 hoặc x = 6

Ta lại có: $2\sqrt{(x-2)(6-x)} \leq (x-2)+(6-x) = 4$ (Theo bất đẳng thức côsi) $\Rightarrow y^2 \leq 4 + 2.4 = 12 \Rightarrow y \leq 2\sqrt{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của y là $2\sqrt{2}$, đạt được khi $x - 2 = 6 - x \Leftrightarrow x = 4$

Bài 21. Cho a, b, c, d ≥ 0. Chứng minh

$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ (Bất đẳng thức Côsi đối với bốn số không âm)

Áp dụng: Chứng minh $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$ ($\forall a; b; c; d > 0$)

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi với a ≥ 0; b ≥ 0, ta có

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \text{ và } c + d \geq 2\sqrt{cd}$$

Cộng vế với vế hai bất đẳng thức, ta được:

$$a + b + c + d \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd} = 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})$$

lại có: $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}} = 2\sqrt[4]{abcd}$

$$\Rightarrow a + b + c + d \geq 4.\sqrt[4]{abcd} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$$

Chú ý: Từ kết quả này ta sẽ chứng minh bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm

$$\forall a; b; c \geq 0, \text{ ta có } \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (*)$$

Thật vậy $(*) \Leftrightarrow a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[3]{abc}$

Theo kết quả trên, ta có

$$a + b + c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[4]{abc.\sqrt[3]{abc}} = 4\sqrt[4]{(\sqrt[3]{abc})^3.\sqrt[3]{abc}}$$

$$= 4\sqrt[4]{(\sqrt[3]{abc})^4} = 4\sqrt[3]{abc} \text{ (đpcm)}$$

Áp dụng Theo kết quả trên, ta có: $\forall a, b, c, d > 0$

$$a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd} > 0$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}} > 0$$

Nhân vế với vế hai bất đẳng thức trên, ta có

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16 \text{ (đpcm)}$$

Bài 22. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 4$

Chứng minh rằng $\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$

(Đề thi vào đại học, cao đẳng khối A – 2005)

Giải

Áp dụng bài 21, ta có $(x+x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 16$

$$\Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{16}{2x+y+z}\ (1)$$

Tương tự: $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{16}{x+2y+z}$ (2); $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\ge\frac{16}{x+y+2z}$ (3)

Cộng vế với vế (1), (2), (3), ta được

$$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 16\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)$$

mà $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4,$

nên: $\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$ (đpcm)

§2. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm bất phương trình một ẩn

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $D = D_f \cap D_g$.

Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \le g(x)$, $f(x) \ge g(x)$ được gọi là bất phương trình một ẩn; x gọi là ẩn số (hay ẩn) và D gọi là tập xác định của bất phương trình đó.

Số $x_0 \in D$ gọi là một nghiệm của bất phương trình $f(x) < g(x)$ nếu $f(x_0) < g(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Khái niệm "nghiệm" cũng được định nghĩa tương tự cho các bất phương trình dạng $f(x) > g(x)$, $f(x) \le g(x)$ và $f(x) \ge g(x)$.

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm (hay tìm tập nghiệm) của bất phương trình đó.

Chú ý: Trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác định D của bất phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x \in D$. Điều kiện đó gọ

là điều kiện xác định của bất phương trình, gọi tắt là điều kiện của bất phương trình

2. *Bất phương trình tương đương*

- Hai bất phương trình (cùng ẩn) được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm

  Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết:

  $f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x)$

- Cho bất phương trình $f(x) < g(x)$ có tập xác định D, $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D.

  Khi đó, trên D, bất phương trình $f(x) < g(x)$ tương đương với mỗi bất phương trình:

  1) $f(x) + h(x) < g(x) + h(x)$;

  2) $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ nếu $h(x) > 0$ với mọi $x \in D$;

  3) $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ nếu $h(x) < 0$ với mọi $x \in D$.

  - $f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^3 < [g(x)]^3$
  - Nếu $f(x)$ và $g(x)$ không âm, $\forall x \in D$ thì: $\Leftrightarrow [f(x)]^2 < [g(x)]^2$

    $f(x) < g(x)$

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm của mỗi bất phương trình

a) $x + \dfrac{1}{x-3} > 1 + \dfrac{1}{x-3}$ (1) ; b) $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} > \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$ (2)

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x-3}} + 2 \le x + \dfrac{x}{\sqrt{x-3}}$ (3)

Giải

a) Điều kiện: $x \neq 3$ Khi đó (1) $\Leftrightarrow x > 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1; +\infty)\backslash\{3\}$

b) Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Khi đó: (2) $\Leftrightarrow x > 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (2; +\infty)$

c) Điều kiện: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$. Khi đó (3) $\Leftrightarrow x \ge 2$

Kết hợp điều kiện, ta có: $x > 3$

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3; +\infty)$

Bài 2. Các cặp bất phương trình sau có tương đương không

a) $3x - 2 > 0$ và $3x - \dfrac{1}{x+1} > 2 - \dfrac{1}{x+1}$

b) $x^2(x-2) < 0$ (1) và $x - 2 < 0$ (2)

c) $\sqrt{x-1}(x-3) < 0$ (1) và $x - 3 < 0$ (2)

d) $x - 4 > 0$ (1) và $(x-4)(x^2 + 4x + 5) > 0$ (2)

Giải

a) Hai bất phương trình tương đương

Vì có cùng tập nghiệm: $S = (\frac{2}{3}; +\infty)$

Bất phương trình thứ hai có điều kiện xác định là $x \neq -1$ nhưng $x = -1$ không thuộc S.

b) Hai bất phương trình không tương đương vì $x = 0$ không thỏa bất phương trình (1), nhưng lại là một nghiệm của bất phương trình (2)

c) Hai bất phương trình không tương đương vì $x = -1$ là một nghiệm của (2), nhưng không thỏa (1)

d) Hai bất phương trình tương đương vì $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 > 0$ nên $(2) \Leftrightarrow x - 4 > 0$ (1)

Bài 3. Chứng tỏ các cặp bất phương trình sau là tương đương

a) $x + \frac{1}{x^2+1} + 1 > \frac{1}{x^2+1}$ (1) và $x + 1 > 0$ (2)

b) $(3x + 1)\sqrt{x-4} > x(3x + 1)$ (1) và $\sqrt{x-4} > x$ (2)

c) $(x^2 - 2x + 4)\sqrt{x-1} > x(x^2 - 2x + 4)$ (1) và $\sqrt{x-1} > x$ (2)

Giải

a) vì $x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên:

$$(1) \Leftrightarrow x + 1 > \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow x + 1 > 0\ (2)$$

b) Điều kiện của (1) là $x > 4 \Rightarrow 3x + 1 > 0$

Ta chia hai vế của (1) cho $3x + 1$, ta được (2)

c) Vì $x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, nên ta chia hai vế của (1) cho $x^2 - 2x + 4$, ta được (2)

Bài 4. Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm

a) $\sqrt{x-1} + 2 < 1$; b) $(x - 1)^2 + x^2 < -1$

c) $\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} < 3$; d) $\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} < 2$

Giải

a) Điều kiện $x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} + 2 \geq 2 > 1$, nên bất phương trình vô nghiệm

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $x^2 \geq 0$ và $(x - 1)^2 \geq 0$ nên vế trái luôn không âm, nên bất phương trình vô nghiệm

c) Ta có $\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} = \sqrt{(x + 1)^2 + 4} + \sqrt{(x - 3)^2 + 1}$ $\geq 2 + 1 = 3$, nên bất phương trình vô nghiệm

d) Ta luôn có $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt{x^2 + 2x + 3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy bất phương trình vô nghiệm

Bài 5. Các biến đổi sau có tương đương không?

a) $\sqrt{x-1} > \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow (\sqrt{x-1})^2 > (\sqrt{2x+3})^2$

$\Leftrightarrow x - 2 > 2x + 3 \Leftrightarrow x < -5$

b) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - 4}} < \frac{1}{x+4} \Leftrightarrow x + 4 < \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

$\Leftrightarrow (x + 4)^2 < (\sqrt{x^2 - 2x - 4})^2 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 < x^2 - 2x - 4 \Leftrightarrow x < -2$

Giải

a) Khi bình phương hai vế, cần đặt điều kiện có nghĩa $x > 1$. Vậy biến đổi không tương đương

b) Biến đổi không tương đương vì chưa đặt điều kiện

$x^2 - 2x - 4 > 0$ và $x + 4 > 0$

Bài 6. a) Tìm các giá trị của m để 1 là một nghiệm của bất phương trình $m - x^2 < 2$

b) Tìm các giá trị để -1 là một nghiệm của bất phương trình $x^2 - 3x + 5 - m \leq 0$

Giải

a) Ta có: $m - 1 < 2 \Leftrightarrow m < 3$; b) $1 + 3 + 5 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 9$

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (1)

1) Nếu $a > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$. Vậy tập nghiệm của (1) là $S (-\infty; -\frac{b}{a})$

2) Nếu $a < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$. Vậy tập nghiệm của (1) là $S = (-\frac{b}{a}; +\infty)$

3) Nếu $a = 0$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x < -b$. Do đó:

– Bất phương trình (1) vô nghiệm ($S = \varnothing$) nếu $b \geq 0$;

– Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x ($S = \mathbb{R}$) nếu $b < 0$

2. Giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn: Ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm thu được

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Giải các bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số

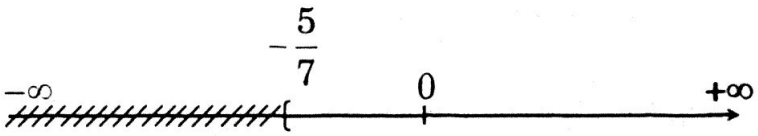
a) $5(x-1) - x(7-x) < x^2$ (1) ; b) $2(x-1) - x > 3(x-1) - 2x - 5$ (2)

c) $\frac{3x+5}{2} - 1 \le \frac{x+2}{3} + x$ (3)

Giải

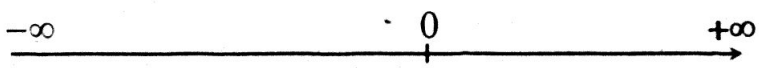
a) (1) $\Leftrightarrow 5x - 5 - 7x + x^2 < x^2 \Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{7}$

Tập nghiệm: $S = (-\frac{5}{7}; +\infty)$. Biểu diễn trên trục số



b) (2) $\Leftrightarrow 2x - 2 - x > 3x - 3 - 2x - 5 \Leftrightarrow 0x > -6$ (luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$)

Biểu diễn trên trục số

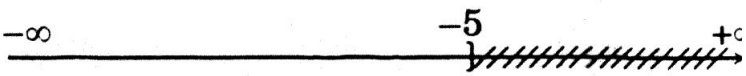


c) (3) $\Leftrightarrow 3(3x+5) - 6 \le 2(x+2) + 6x$

$\Leftrightarrow 9x + 15 - 6 \le 2x + 4 + 6x \Leftrightarrow x \le -5$

Tập nghiệm: $S = (-\infty; -5]$

Biểu diễn trên trục số



Bài 2. Giải và biện luận các bất phương trình

a) $5x - m > mx - 4$ (1) ; b) $(m+1)x + m - 3 > 4x + 1$ (2)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow (5-m)x > m - 4$

- Nếu $5 - m > 0 \Leftrightarrow m < 5$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x > \frac{m-4}{5-m}$
- Nếu $5 - m = 0 \Leftrightarrow m = 5$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 0x > 1$ (vô nghiệm)
- Nếu $5 - m < 0 \Leftrightarrow m > 5$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x < \frac{m-4}{5-m}$

Đáp số: $m < 5$ tập nghiệm $S = (\frac{m-4}{5-m}; +\infty)$

$m = 5$ tập nghiệm $S = \varnothing$

$m > 5$ tập nghiệm $S = (-\infty; \dfrac{m-4}{5-m})$

b) $(2) \Leftrightarrow (m-3)x > 4 - m$

- Nếu $m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$. Khi đó $(2) \Leftrightarrow x > \dfrac{4-m}{m-3}$
- Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ Khi đó $(2) \Leftrightarrow 0x > 1$ (vô nghiệm)
- Nếu $m - 3 < 0 \Leftrightarrow m < 3$ Khi đó $(2) \Leftrightarrow x < \dfrac{4-m}{m-3}$

Đáp số: $m > 3$ tập nghiệm $S = (\dfrac{4-m}{m-3}; +\infty)$

$m = 3$ tập nghiệm $S = \varnothing$

$m < 3$ tập nghiệm $S = (-\infty; \dfrac{4-m}{m-3})$

Bài 3. Giải các bất phương trình a) $\sqrt{(x-3)^2(x-4)} \geq 0$ (1)

b) $(x-1)\sqrt{x+1}\ \sqrt{x+2} < 0$ (2) ; c) $(x-1)\sqrt{(x+1)(x-1)} < 0$ (3)

Giải

a) • Nếu $x = 3$ (là một nghiệm của (1))

• Nếu $x \neq 3 \Rightarrow (x-3)^2 > 0$. Vậy $(1) \Leftrightarrow x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

Đáp số: tập nghiệm $S = \{3\} \cup [4; +\infty)$

b) Nếu $x = 1$ (không thỏa (2))

Nếu $x \neq 1$ Ta có $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x + 1 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Đáp số: Tập nghiệm $S = (-1; 1)$

c) • Nếu $x = 1$ (không thỏa (3))

• Nếu $x \neq 1$, Ta có

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) > 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1$

Đáp số: Tập nghiệm $S = (-\infty; -1)$

Bài 4. Giải các bất phương trình

a) $\sqrt{x-4} - \sqrt{3x-14} > 0$ (1) ; b) $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x+1} \geq 0$ (2)

c) $(x+2)\sqrt{4-x}\,.\sqrt{5-x} \geq 0$ (3) ; d) $(x-3)\dfrac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{4-x}} \geq 0$ (4)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-4} > \sqrt{3x-14}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{14}{3} \\ x - 4 > 3x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{14}{3} \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{14}{3} \leq x < 5$$

Đáp số: Tập nghiệm $S = [\frac{14}{3}; 5)$

b) • Nếu $x = -2$ (không thỏa (2))

• Nếu $x \neq -2$ thì $(x + 2)^2 > 0$ $\forall x \neq -2$. Vậy (2) $\Leftrightarrow x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Đáp số: tập nghiệm $S = [-1; +\infty)$

c) Ta có (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 4 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$

Đáp số: Tập nghiệm $S = [-2; 4]$

d) Ta có (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ 4 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 6 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x < 4$

Đáp số: Tập nghiệm $S = [3; 4)$

Bài 5. Tìm m để các hệ sau có nghiệm

a) $\begin{cases} 3x - 2 > -4x + 5 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases}$ (1) ; b) $\begin{cases} x - 7 \leq 0 \\ mx \geq m + 1 \end{cases}$ (2)

Giải

a) Ta có (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 & (*) \\ x < \dfrac{-m - 2}{3} & (**) \end{cases}$

Tập nghiệm của (*): $S_1 = (1; +\infty)$;

Tập nghiệm (**): $S_2 = (-\infty; \dfrac{-m - 2}{3})$

Hệ (1) có nghiệm $1 < \dfrac{-m - 2}{3} \Leftrightarrow m < -5$

Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m < -5$

b) Xét bất phương trình $mx \geq m + 1$ (*)

• Nếu $m > 0$: (*) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{m + 1}{m}$

Tập nghiệm của (*): $S_1 = [\dfrac{m + 1}{m}; +\infty)$

Ta có $x - 7 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 7$ (**) Tập nghiệm của (**): $S_2 = (-\infty; 7]$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{m} \leq 7$

$\Leftrightarrow m + 1 \leq 7m$ (vì $m > 0$) $\Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{6}$

- Nếu $m = 0$ (2) vô nghiệm
- Nếu $m < 0$ (*) $\Leftrightarrow x \leq \dfrac{m+1}{m}$

Tập nghiệm của (*): $S_1 = (-\infty; \dfrac{m+1}{m})$

Ta thấy $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ Vậy hệ luôn có nghiệm $\forall m < 0$

Đáp số: $m \geq \dfrac{1}{6}$ hoặc $m < 0$

Bài 6. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases}(2m-1)x + 2m \geq 3 & (1)\\ 4(m-1)x + 3 \geq 0 & (2)\end{cases}$

Giải

Xét (1): • Nếu $2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{2}$ Khi đó (1) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{3-2m}{2m-1}$

Tập nghiệm của (1): $S_1 = [\dfrac{3-2m}{2m-1}; +\infty)$

- Nếu $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$ Khi đó (1) vô nghiệm Tập nghiệm của (1) là $\varnothing$
- Nếu $2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{2}$ Khi đó (1) $\Leftrightarrow x \leq \dfrac{3-2m}{2m-1}$

Tập nghiệm của (1)$S'_1 = (-\infty; \dfrac{3-2m}{2m-1}]$

Xét (2): • Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ Khi đó (2) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{-3}{4(m-1)}$

Tập nghiệm của (2) $S_2 = [\dfrac{-3}{4(m-1)}; +\infty)$

- Nếu $m = 1$ Khi đó (2) luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$
- Nếu $m < 1$ Khi đó (2) $\Leftrightarrow x \leq \dfrac{-3}{4(m-1)}$

Tập nghiệm của (2): $S'_2 = (-\infty; \dfrac{-3}{4(m-1)}]$

Điều kiện hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi giao hai tập nghiệm là một phần tử. Vậy ta có

+ Với $m > 1$: Tập $S_1 \cap S_2$ có vô số phần tử (không thỏa)

+ Với $m = 1$: $S_1 \cap \mathbb{R} = S_1$ (không thỏa)

+ Với $\frac{1}{2} < m < 1$: $S_1 \cap S'_2$ có một phần tử chung

$$\Leftrightarrow \frac{3-2m}{2m-1} = \frac{-3}{4(m-1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = \frac{5}{2} & \text{(loại)} \\ m = \frac{3}{4} & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

+ $m = \frac{1}{2}$. $\varnothing \cap S'_2 = \varnothing$ (không thỏa)

+ $m < \frac{1}{2}$. $S'_1 \cap S'_2$ có vô số phần tử (không thỏa)

Bài 7. Tìm các giá trị của m để hàm số

$y = \sqrt{mx - 2m + 1} + \sqrt{2x + m - 2}$ xác định $\forall x \geq 1$

Giải

Điều kiện $\begin{cases} mx - 2m + 1 \geq 0 & (1) \\ 2x + m - 2 \geq 0 & (2) \end{cases}$

• Nếu $m > 0$. Khi đó $(1) \Leftrightarrow x \geq \frac{2m-1}{m}$. Lại có $(2) \Leftrightarrow x \geq \frac{2-m}{2}$

Hàm số xác định $\forall x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-m}{2} \leq 1 \\ \frac{2m-1}{m} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \text{ (vì } m > 0) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$

• Nếu $m = 0$. Khi đó (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$; $(2) \Leftrightarrow x \geq 1$

Vậy $m = 0$ thỏa mãn điều kiện

• m , 0 Khi đó $(1) \Leftrightarrow x \leq \frac{2m-1}{m}$ (không thỏa mãn $\forall x \geq 1$)

Đáp số: $0 \leq m \leq 1$

Bài 8. Tìm các giá trị của m để hệ vô nghiệm $\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 & (1) \\ 4x + 1 < -x + 6 & (2) \end{cases}$

Giải

$(1) \Leftrightarrow (m-3)x < m^2 - 9$

• Nếu $m > 3$: $(1)\ x < m + 3$

Tập nghiệm của (1) là $S_1 = (-\infty; m + 3)$

Ta có $(2) \Leftrightarrow x < 1$

Tập nghiệm của (2) $S_2 = (-\infty; 1)$

Ta thấy $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ nên hệ không thể vô nghiệm

- $m = 3$ (1) vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm khi $m = 3$
- $m < 3$ (1) $\Leftrightarrow x > m + 3$

Tập nghiệm của (1) là $S_1 = (m + 3; +\infty)$

Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow 1 \leq m + 3 \Leftrightarrow m \geq -2$

Vậy $-2 \leq m < 3$. Đáp số: $-2 \leq m \leq 3$

§4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Nhị thức bậc nhất (đối với x) có dạng $ax + b$ $(a \neq 0)$
- $ax + b = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{-b}{a}$. x_0 gọi là nghiệm của nhị thức

Bảng xét dấu của f(x)

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x) = ax + b$	Trái dấu với a		0	Cùng dấu với a	

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Lập bảng xét dấu các biểu thức

a) $f(x) = 3x + 6$ b) $f(x) = -3x + 5$

c) $f(x) = -4x - 10$ d) $f(x) = 4x - 11$

Giải

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Ta có

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$. Ta có

x	$-\infty$		$\dfrac{5}{3}$		$+\infty$
f(x)		$+$	0	$-$	

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}$. Ta có

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
f(x)		$+$	0	$-$	

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{4}$. Ta có

x	$-\infty$		$\frac{11}{4}$		$+\infty$
f(x)		$-$	0	$+$	

Bài 2. Lập bảng xét dấu các biểu thức

a) $f(x) = \dfrac{3-2x}{2x-1}$ b) $f(x) = 2 + \dfrac{1-3x}{2x+1}$ c) $f(x) = \dfrac{(4x-1)(x+1)}{3-2x}$

Giải

a) Điều kiện: $2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{1}{2}$; $3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$3-2x$	$+$		$\vert$	$+$	0	$-$
$2x-1$	$-$		0	$+$	$\vert$	$+$
f(x)	$-$		$\vert\vert$	$+$	0	$-$

b) Điều kiện: $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{2}$. Ta có: $f(x) = \dfrac{x+3}{2x+1}$

$x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x+3$	$-$		0	$+$	$\vert$	$+$
$2x+1$	$-$		$\vert$	$-$	0	$+$
f(x)	$+$		0	$-$	$\vert\vert$	$+$

c) Điều kiện: $3 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$

$4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$; $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$4x-1$	$-$		$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x+1$	$-$		0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$
$3-2x$	$+$		$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
f(x)	$+$		0	$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$-$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bậc nhất rồi xét dấu

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ b) $f(x) = -x^2 + 10x - 9$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

Giải

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Ta có: $f(x) = (x + 1)(x + 2)$. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x + 1$	$-$	|	$-$	0	$+$		
$x + 2$	$-$	0	$+$	|	0		
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$-x + 9$	$+$	|	$+$	0	$-$		
$x - 1$	$-$	0	$+$	|	$+$		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$. Ta có: $f(x) = 2(x - 1)(x - \dfrac{3}{2})$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$x - 1$	$-$	0	$+$	|	$+$		
$x - \dfrac{3}{2}$	$-$	|	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

Bài 4. Giải các bất phương trình

a) $\dfrac{(1 - x)(x - 2)}{x + 3} \leq 0$ (1) ; b) $1 - \dfrac{2 - x}{3x - 2} > 0$ (2)

c) $\dfrac{1}{x - 3} < \dfrac{1}{x + 3}$ (3) ; d) $\dfrac{1 + x}{1 - x} \leq 2$ (4)

Giải

a) Ta có: $1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Bảng xét dấu vế trái của bất phương trình:

x	$-\infty$		-3		1		2	$+\infty$
$1-x$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x-2$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+3$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
Vế trái	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ đó, ta có tập nghiệm của (1): $S = (-3; 1] \cup [2; +\infty)$

b) Ta có: $(2) \Leftrightarrow \dfrac{4x-4}{3x-2} > 0$ (*)

$4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$

Bảng xét dấu vế trái của (*)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1	$+\infty$
$4x-4$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$3x-2$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Vế trái	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Từ đó, ta có tập nghiệm của (2): $S = (-\infty; \dfrac{2}{3}) \cup (1; +\infty)$

c) Ta có: $(3) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{6}{(x-3)(x+3)} < 0$

Bảng xét dấu của biểu thức: $\dfrac{6}{(x-3)(x+3)}$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x-3$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
$x+3$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		
$\dfrac{6}{(x-3)(x+3)}$	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$		

Từ đó, ta có tập nghiệm của (3): $S = (-3; 3)$

d) Ta có: $(4) \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} - 2 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{1-x} \le 0$ (*)

Bảng xét dấu vế trái của (*)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
3x – 1	–		0	+	|		+
1 – x	+		|	+	0		–
Vế trái	–		0	+	||		–

Từ đó, ta có tập nghiệm của (4) $S = (-\infty; \frac{1}{3}] \cup (1; +\infty)$

Bài 5. Giải các phương trình

a) $|3x - 8| - |3x - 2| = 6$ (1)

b) $|x + 1| + |x - 2| = 4$ (2)

Giải

a) Bảng xét dấu của x + 1 và x – 2

x	$-\infty$		2/3		8/3		$+\infty$
3x – 8	–		|	–	0	+	
3x – 2	–		0	+	|		+

- Nếu $x \le \frac{2}{3}$: (1) $\Leftrightarrow -(3x - 8) + (3x - 2) = 6 \Leftrightarrow 6 = 6$

  luôn đúng $\forall x \le \frac{2}{3}$

- Nếu $\frac{2}{3} < x \le$: (1) $\Leftrightarrow -(3x - 8) - (3x - 2) = 6 \Leftrightarrow -6 = 6$ (vô nghiệm)

Đáp số: Tập nghiệm $S = (-\infty; \frac{2}{3}]$

b) Bảng xét dấu 3x – 8 và 3x – 2

x	$-\infty$		–1		2		$+\infty$
x + 1	–		0	+	|		+
x – 2	–		|	–	0	+	

- Nếu $x \le 1$ Khi đó

$(2) \Leftrightarrow -(x + 1) - (x - 2) = 4 \Leftrightarrow -2x = 3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ (nhận)

- Nếu $-1 < x \le 2$ Khi đó $(2) \Leftrightarrow (x + 1) - (x - 2) = 4 \Leftrightarrow 3 = 4$ (vô nghiệm)
- Nếu $x > 2$ Khi đó

$(2) \Leftrightarrow (x + 1) + (x - 2) = 4 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ (nhận)

Đáp số: $S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$

Bài 6. Giải các bất phương trình

a) $|3 - x| < 4$ (1) ; b) $2|x + 1| > x + 4$ (2)

c) $3|x - 1| \le x + 3$ (3)

Giải

Chú ý $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$

a) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x < 4 \\ 3 - x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 7$

Đáp số: Tập nghiệm $S = (-1; 7)$

b) $(2) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2(x + 1) > x + 4 \\ 2(x + 1) < -(x + 4) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 2 \\ 3x < -6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > 2 \\ x < -2 \end{bmatrix}$

Đáp số: Tập nghiệm $S = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

c) $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x - 1) \le x + 3 \\ 3(x - 1) \ge -(x + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3 \le x + 3 \\ 3x - 3 \ge -x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x \le$

Đáp số: Tập nghiệm $S = [0; 3]$

Bài 7. Giải các bất phương trình

a) $\dfrac{|x - 3|}{x^2 - 5x + 6} \ge 2$ (1); b) $\dfrac{|4 - x|}{x + 6} < 3$ (2) ; c) $\dfrac{2}{|x - 4|} > 1$ (3)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ \dfrac{x - 3}{x^2 - 5x + 6} \ge 2 \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} x - 3 < 0 \\ \dfrac{-(x - 3)}{x^2 - 5x + 6} \ge 2 \end{cases} & (**) \end{bmatrix}$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \dfrac{x - 3}{(x - 3)(x - 2)} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \dfrac{1}{x - 2} \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \dfrac{5 - 2x}{x - 2} \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2 \le x \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$ (vô nghiệm)

Ta có: (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ \dfrac{-(x-3)}{(x-2)(x-3)} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3<0 \\ \dfrac{-1}{x-2} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ \dfrac{2x-3}{x-2} \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ \dfrac{3}{2} \leq x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{3}{2} \leq x<2$

Đáp số: Tập nghiệm S = $[\dfrac{3}{2}; 2)$

b) (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ \dfrac{4-x}{x+6}<3 \end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} 4-x<0 \\ \dfrac{-(4-x)}{x+6}<3 \end{cases} \quad (**) \end{array}\right.$

Ta có (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ \dfrac{4x+14}{x+6}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ \left[\begin{array}{l} x>\dfrac{7}{2} \\ x<-6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{2}<x \leq 4 \\ x<-6 \end{cases}$

Ta có: (**) $\Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ -4+x<3(x+6) \end{cases}$ (vì $x>4 \Rightarrow x+6>0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x>-11 \end{cases} \Leftrightarrow x>4$

Kết hợp các kết quả của (*) và (**) ta có $x>-\dfrac{7}{2}$ hoặc $x<-6$

Đáp số: Tập nghiệm S = $(-\infty; -6) \cup (-\dfrac{7}{2}; +\infty)$

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2>|x-4| \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4<2 \\ x-4>-2 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<6 \\ x>2 \\ x \neq 4 \end{cases}$

Đáp số: Tập nghiệm S = $(2; 6)\backslash\{4\}$

ài 8. Giải các bất phương trình

a) $|2x-1|<|x+3|$ (1) ; b) $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| \leq 4$ (2)

c) $\left|\dfrac{x-3}{x-5}\right| \geq 1$ (3)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow |2x-1|^2 < |x+3|^2$

$\Leftrightarrow [(2x-1)-(x+3)][(2x-1+x+3)] < 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(3x+2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < x < 4$

(bạn đọc tự lập bảng xét dấu $x-4$ và $3x+2$)

b) $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x+2} \le 4 \\ \frac{2x-1}{x+2} \ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{x+2} - 4 \le 0 \\ \frac{2x-1}{x+2} + 4 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2x-9}{x+2} \le 0 \\ \frac{6x+7}{x+2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > -2 \\ x \le -\frac{9}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge -\frac{7}{6} \\ x < -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{7}{6} \\ x \le -\frac{9}{2} \end{cases}$

Đáp số: Tập nghiệm $S = (-\infty; -\frac{9}{2}] \cup [-\frac{7}{6}; +\infty)$

c) $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x-3}{x-5} \ge 1 \\ \frac{x-3}{x-5} \le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{x-5} \ge 0 \\ \frac{2x-8}{x-5} \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ 4 \le x < 5 \end{array}\right.$

Đáp số: tập nghiệm $S = [4; +\infty)\backslash\{5\}$

(Bạn còn có thể xét dấu các biểu diễn thức trong dấu giá trị tuy đối để giải các bài toán trên)

§5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là $ax + b \le c$ (1)

($ax + by < c$; $ax + by \ge c$; $ax + by > c$)

trong đó a, b, c là những số thực đã cho a và b không đồng thời bằ 0, x và y là các ẩn số.

2. Biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình bậc nhất

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệ bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

/ BÀI TẬP

Bài 1. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các bất phương trình

a) $3x - 2y + 6 > 0$ (1) ; b) $3x - 4y - 12 > 0$ (2)

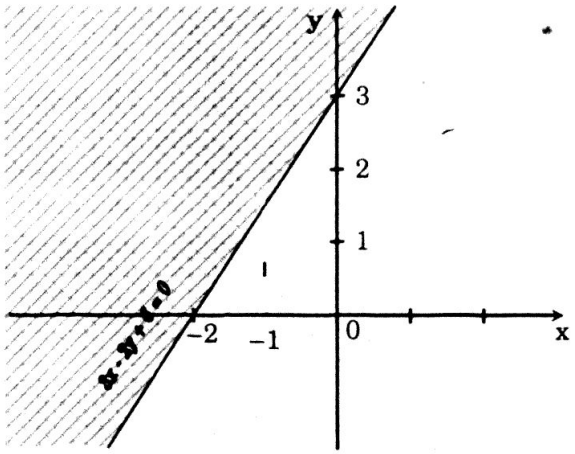
c) $x + y > 2$ (3)

Giải

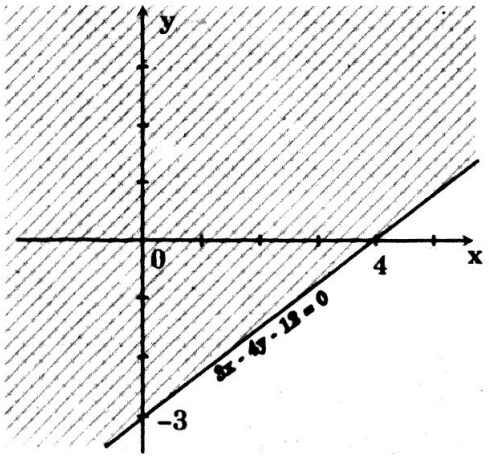
a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng $3x - 2y + 6 = 0$ qua hai điểm $(-2; 0)$ và $(0; 3)$

Tập hợp các điểm M có tọa độ (x; y) thỏa mãn (1) là một nửa mặt phẳng ở phía dưới đường thẳng $3x - 2y + 6 = 0$

Đó là miền không bị gạch trên hình vẽ

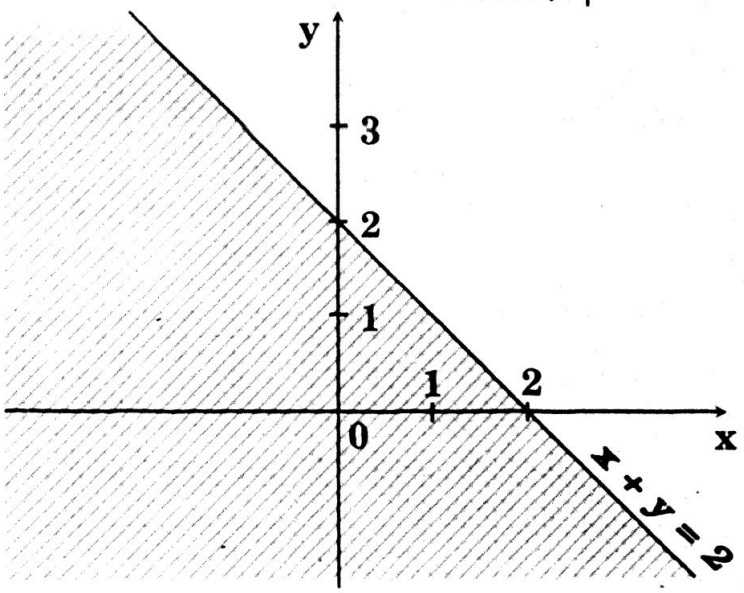


b) Vẽ đường thẳng $3x - 4y - 12 = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy qua hai điểm $(0; -3)$ và $(4; 0)$. Miền nghiệm của (2) là miền không bị gạch trên hình vẽ



c) Vẽ đường thẳng $x + y = 2$

Miền nghiệm là miền không bị gạch trên hình vẽ



Bài 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của các hệ

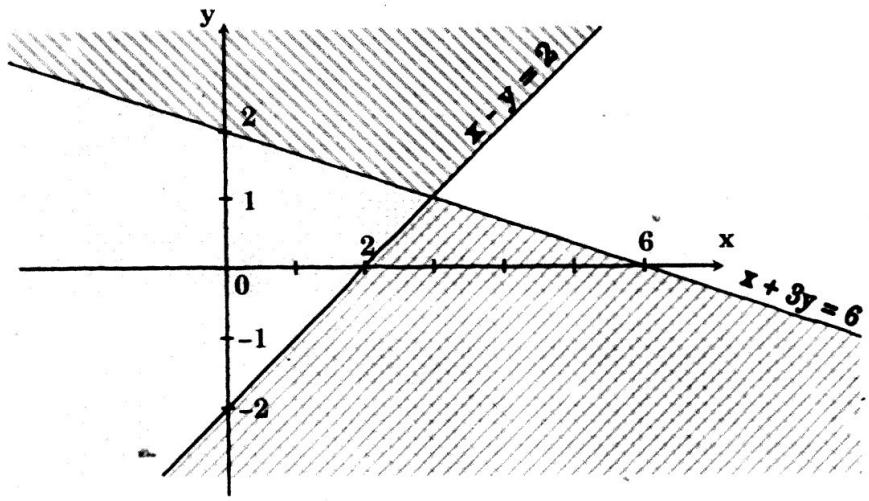
a) $\begin{cases} x - y > 2 \\ x + 3y > 6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y \le 1 \\ y - 2x \ge 1 \end{cases}$

Giải

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ các đường thẳng:

$x - y = 2$ và $x + 3y = 6$

Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ



b) Trong mặt phẳng Q tọa độ Oxy vẽ các đường thẳng $x - 2y = 1$ và $y - 2x = 1$

Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ

Bài 3. Tìm miền nghiệm của các hệ:

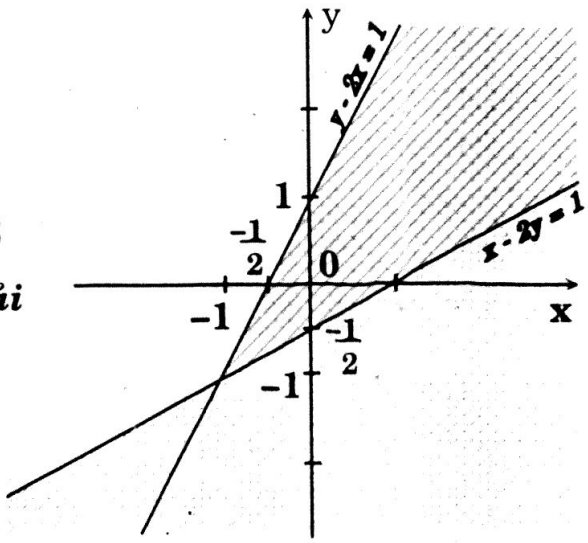
a) $\begin{cases} x + y > 2 \\ x - y < 2 \\ x - 3y > -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y \ge 0 \\ 2y - x \le 6 \\ 2x - y \le -2 \end{cases}$

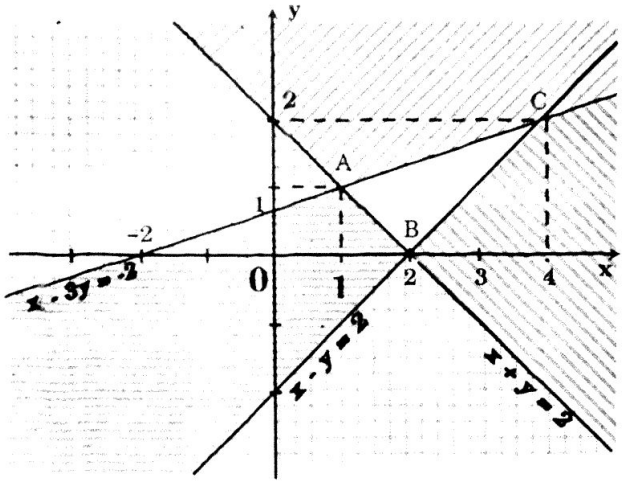
Giải

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ các đường thẳng:

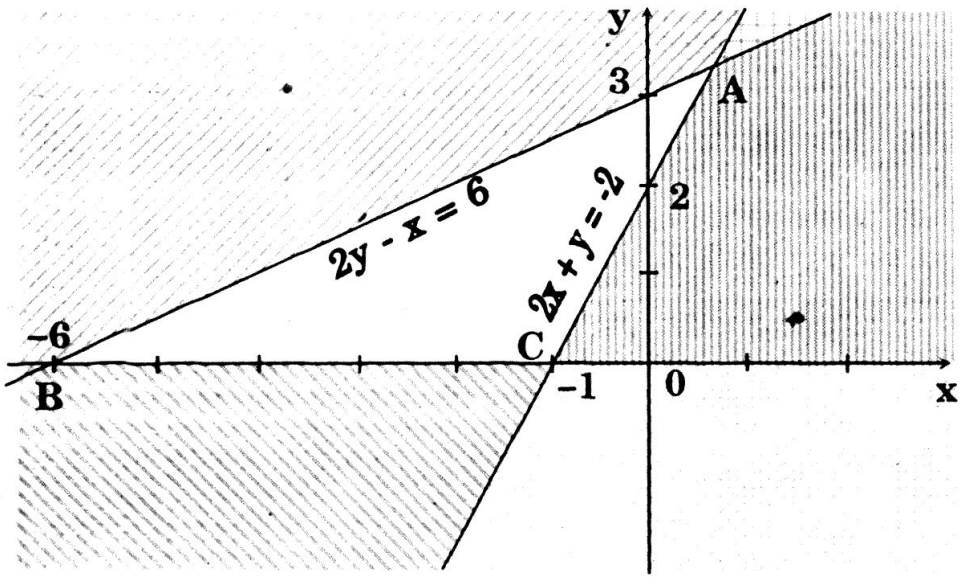
$x + y = 2$; $x - y = 2$; $x - 3y = -2$

Miền nghiệm phần không bị gạch trên hình vẽ (không kể biên) tức là "miền trong" của ΔABC





b) Tương tự a) (xem hình vẽ)



Miền nghiệm là "miền trong" của ΔABC

ài 4. Cho S là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy có tọa độ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 3x - 2y \geq -6 \\ 3x + y \geq 3 \\ x \leq 3 \end{cases}$

Tìm giá trị lớn nhất của m = 2x + 2y

Giải

S gồm các điểm nằm bên trong ΔABC (kể cả biên) A(0; 3); B(3; –6); C(3; $\frac{15}{2}$) (xem hình vẽ)

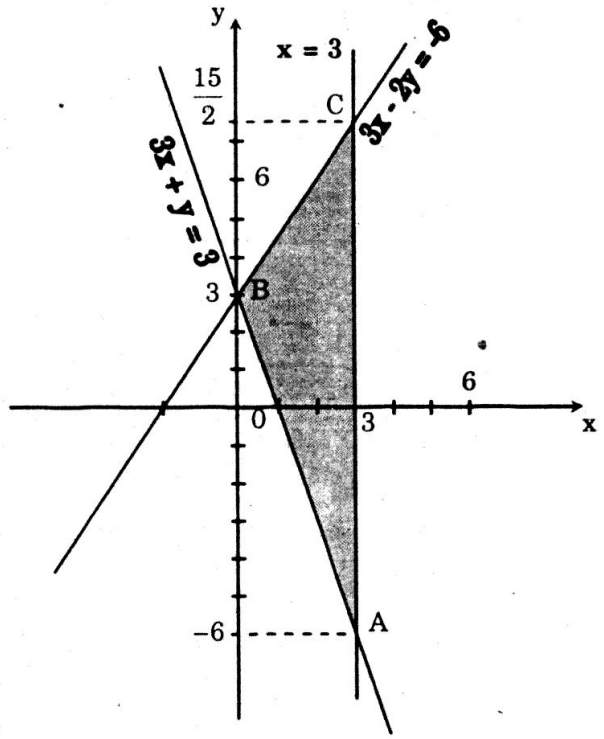
Xét họ đường thẳng $m = 2x + 2y \Leftrightarrow y = -x + \frac{m}{2}$

Họ đường thẳng này song song với đường thẳng y = –x

Khi m tăng thì đường thẳng đó tịnh tiến song song lên phía trên.

Giá trị lớn nhất của m đạt được khi đường thẳng qua C(3; $\frac{15}{2}$)

Vậy giá trị lớn nhất của m là 2.3 + 2. $\frac{15}{2}$ = 21



Bài 5. Gọi S là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy có tọa đ

thỏa mãn hệ $\begin{cases} y - 2x \le -2 \\ x - 2y \le 2 \\ x + y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$

Tìm các điểm của S sao cho biểu thức f = y – x đạt giá trị nhỏ nhất

Giải

Miền nghiệm của hệ bất phương là phần bên trong ΔABC (kể cả biê

trên hình vẽ $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; $B\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$; C(4; 1)

Ta có f = y – x ⇔ y = x + f

Đây xem như phương trình của họ đường thẳng phụ thuộc tham số f kl

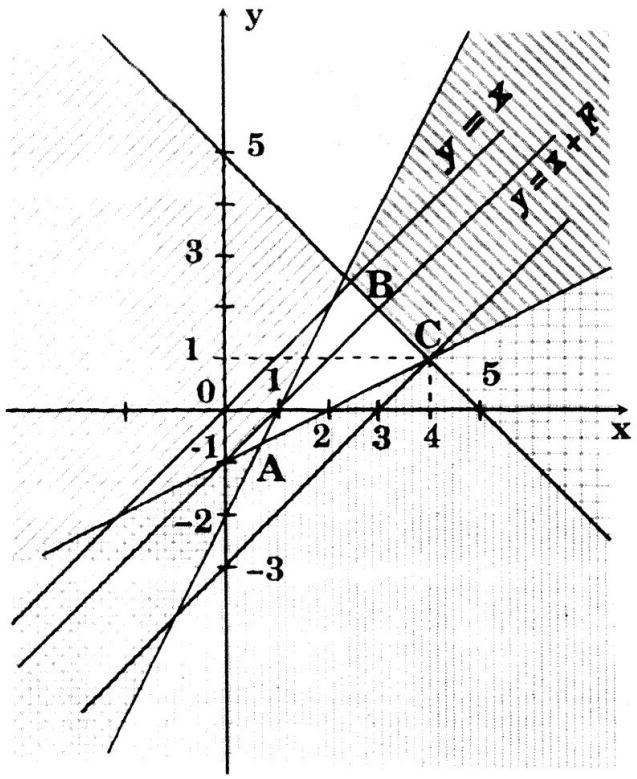
f thay đổi, họ đường thẳng này song song với đường thẳng y = x.

Khi f giảm, đường thẳng đó tịnh tiến song song xuống phía dư

những điểm thuộc ΔABC có tọa độ (x; y) để f đạt cực tiểu khi đườr

thẳng đó qua C(4; 1)

Vậy giá trị nhỏ nhất của f = 1 – 4 = –3



§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $\Delta = b^2 - 4ac$

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x \in \mathbb{R}$

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, trừ khi $x = \dfrac{-b}{2a}$

Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$, trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$ trong đó x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của $f(x)$.

2. $f(x) = ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$f(x) = ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Xét dấu các tam thức bậc hai

a) $f(x) = x^2 + x + 2$; b) $f(x) = x^2 - 8x + 7$

c) $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$; d) $f(x) = x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}$

e) $f(x) = \sqrt{2}\,x^2 + (\sqrt{2} + 1)x - 1$

Giải

a) Ta có $\begin{cases}\Delta = 1 - 8 < 0\\ a = 1 > 0\end{cases}$. Vậy $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\\ x = 7\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của f(x) (a = 1 > 0)

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\\ x = \dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của f(x) (a = −2 < 0)

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\\ x = -\sqrt{2}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của f(x) (a = 1 > 0)

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

e) $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}x^2 + (\sqrt{2} + 1)x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\\ x = \sqrt{2}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của f(x) ($a = -\sqrt{2} < 0$)

x	$-\infty$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

Bài 2. Xét dấu của biểu thức

a) $A = \dfrac{x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ b) $B = \dfrac{x^2 + 4x - 12}{x^2 + 5x + 6}$

c) $C = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 5x - 6}$ d) $D = \dfrac{x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$

Giải

a) $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\\ x = -2\end{array}\right.$

Bảng xét dấu của A

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x-2$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		
A	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$		

b) $x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của B

x	$-\infty$		-6		-3		-2		2		$+\infty$
$x^2+4x-12$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
x^2+5x+6	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		
B	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$		

c) $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

$x^3 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - 1 = 0 & \Leftrightarrow x = 1 \\ x^2 + x + 6 = 0 & \text{(vô nghiệm vì } \Delta = -23 < 0) \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $C = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{(x - 1)(x^2 + x + 6)}$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		
$x-1$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
x^2+x+6	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$		
C	$-$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$		

d) $x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\sqrt{5} \end{array}\right.$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 + 5x + 6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của $D = \dfrac{x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}}{(x - 1)(x^2 + 5x + 6)}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		1		2		3		$+\infty$
$x^2 + (\sqrt{5} - 1)x - \sqrt{5}$		+	0	−	0	+	|	+	|	+	
$x - 1$		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$(x^2 - 5x + 6)$		+	|	+	|	+	0	−	0	+	
D		−	0	+	‖	+	‖	−	‖	+	

Bài 3. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn dương.

a) $f(x) = x^2 - mx + m + 3$. ; b) $f(x) = (m + 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2 - m$.

c) $f(x) = (m - 1)x^2 + (4m - 3)x + 5m - 3$.

Giải

a) $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 4m - 12 < 0 \end{cases}$

Xét dấu $m^2 - 4m - 12$:

m	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$m^2 - 4m - 12$		+	0	−	0	+	

Vậy $m^2 - 4m - 12 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 6$.

b) + Với $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Ta có: $3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy: $m = -1$.

+ Với $m + 1 \neq 0$

$$f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ (m + 1)(2m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}.$$

Đáp số: $-1 \leq m < \dfrac{1}{2}$.

c) + $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$

Ta có: $f(x) = x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ (không thỏa mãn $\forall x$).

+ $m - 1 \neq 0$

$$f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 > 0 \\ -4m^2 + 8m - 3 < 0 \end{cases}$$

Xét dấu: $-4m^2 + 8m - 3$

m	$-\infty$		1/2		3/2		$+\infty$
$-4m^2 + 8m - 3$		−	0	+	0	−	

Vậy $-4m^2 + 8m - 3 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \frac{3}{2} \\ m < \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với $m > 1$, ta có: $m > \frac{3}{2}$. Đáp số: $m > \frac{3}{2}$

Bài 4. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn âm:

a) $f(x) = (m - 2)x^2 - 2(m - 3)x + m - 1$; b) $f(x) = mx^2 + x - 1$.

c) $f(x) = (2 - m)x^2 - 3mx + 2m$.

Giải

a) + $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$. Ta có: $f(x) = 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$ (không thỏa mãn $\forall x$).

+ $m - 2 \neq 0$:

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 < 0 \\ -3m + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > \frac{7}{3} \end{cases} \text{(vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị m nào thỏa mãn điều kiện của bài toán.

b) + $m = 0$. Ta có: $f(x) = x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

(không thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$).

$$+ m \neq 0,\ f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 1 + 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m < -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m < -\frac{1}{4}$. Đáp số: $m < -\frac{1}{4}$.

c) + $2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Ta có: $f(x) = -6x + 4 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$ (không thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$).

+ $2 - m \neq 0$.

$$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m < 0 \\ 17m^2 - 16m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 0 < m < \frac{16}{17} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \in \varnothing$.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Bài 5. Lập bảng xét dấu của các biểu thức.

a) $f(x) = x^2 - 2(m + 3)x + m^2 + 4m + 1$.

b) $f(x) = mx^2 + (m - 3)x + m - 3$.

Giải

a) Ta có: $\Delta' = 2m + 8$.

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -4$. Ta có: $\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -4$. Ta có: $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

+ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -4$.

Khi đó f(x) có hai nghiệm $x = m + 3 \pm \sqrt{2m + 8}$.

Bảng xét dấu của f(x):

x	$-\infty$		$m + 3 - \sqrt{2m + 8}$		$m + 3 + \sqrt{2m + 8}$		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

b) Ta có: $a = m$; $\Delta = (m - 3)^2 - 4m(m - 3) = -3m^2 + 6m + 9$.

Bảng xét dấu của a và Δ:

m	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
a = m		−	|	−	0	+	|	+	
Δ		−	0	+	|	+	0	−	

• Nếu $m < -1$. Ta có: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

• Nếu $m = -1 \Rightarrow f(x) = -x^2 - 4x - 4 = -(x + 2)^2 \leq 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

• Nếu $-1 < m < 0$.

$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Khi đó f(x) có hai nghiệm x_1; x_2 phân biệt ($x_1 < x_2$).

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

• Nếu $m = 0$. Ta có: $f(x) = -3x - 3$.

Bảng xét dấu của f(x):

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f(x)		−	0	+	

• Nếu $0 < m < 3$. Ta có: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

Tương tự, ta có:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

• Nếu m = 3. Ta có: $f(x) = 3x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

• Nếu m > 3. Ta có: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 6. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn luôn vô nghiệm, dù m lấy bất kỳ giá trị nào?

a) $x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m + 5 = 0$.

b) $(m^2 + 1)x^2 + 2(m + 2)x + 7 = 0$

Giải

a) Ta có: $\Delta' = -4 < 0,\ \forall m \Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta' = (m + 2)^2 - 7(m^2 + 1) = -6m^2 + 4m - 3$.

Đây là tam thức bậc hai của m có hệ số $a = -6 < 0$ và

$\delta' = 4 - 18 < 0 \Rightarrow \Delta' < 0,\ \forall m$. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

a) $x^2 - 2(m - 1)x + m - 5 = 0$; b) $(m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x - 4 = 0$.

Giải

a) Ta có: $\rightarrow \Delta' = (m - 1)^2 - (m - 5) = m^2 - 3m + 6$.

Đây là tam thức bậc hai của m, có hệ số $a = 1 > 0$ và $\delta' = 9 - 24 < 0 \Rightarrow \Lambda' > 0\ \forall m \in \mathbb{R}$. Vậy phương trình luôn có nghiệm, $\forall m$.

b) Ta có: $\rightarrow \Delta' = (m + 1)^2 + 4(m^2 + 2) = 5m^2 + 2m + 9$.

Đây là tam thức bậc hai của m, có hệ số $a = 5 > 0$ và $\delta' = 1 - 45 < 0$ nên $\rightarrow \Delta' > 0,\ \forall m$. vậy phương trình luôn có nghiệm, $\forall m$.

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2 = bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a \neq 0$.

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Giải các bất phương trình.

a) $2x^2 - 3x - 5 < 0$ (1)

b) $3x^2 - 10x + 3 > 0$ (2)

c) $-3x^2 + x + 4 \geq 0$ (3)

d) $x^2 - 7x - 30 \leq 0$ (4)

Giải

a) Ta có: $f(x) = 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của f(x):

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{5}{2}$		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Vậy tập nghiệm của (1) là $S = (-1; \dfrac{5}{2})$.

b) Ta có: $f(x) = 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ x = 3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của f(x):

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		3		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Vậy tập nghiệm của (2) là: $S = (-\infty ; \dfrac{1}{3}) \cup (3; +\infty)$.

c) Ta có: $f(x) = -3x^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của f(x):

x	$-\infty$		-1		$\dfrac{4}{3}$		$+\infty$
f(x)		−	0	+	0	−	

Vậy tập nghiệm của (3) là: $S = [-1; \dfrac{4}{3}]$.

d) Ta có: $f(x) = x^2 - 7x - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu của f(x):

x	$-\infty$		-3		10		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Vậy tập nghiệm của (4) là: S = [−3; 10].

Bài 2. Giải các bất phương trình:

a) $(2x + 5)(x^2 - 3x - 10) \geq 0$ (1) ; b) $(3x + 4)(x^2 + x - 30) < 0$ (2)

c) $x^3 - 5x + 4 < 0$ (3)

Giải

a) Ta có: $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$; $x^3 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-2		5		$+\infty$
$2x + 5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 3x - 10$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của (1) là: $S = [-\frac{5}{2}; -2] \cup [5; +\infty)$.

b) Ta có: $3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

$x^2 + x - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -6 \\ x = 5 \end{array}\right.$

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình.

x	$-\infty$		-6		$-\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$3x + 4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 + x - 30$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (2) là:

$S = (-\infty; -6) \cup (-\frac{4}{3}; 5)$.

c) Ta có: $x^3 - 5x + 4 = (x - 1)(x^2 + x - 4)$

$x^3 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$		1		$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+x-4		$+$	0	$-$	|		0	$+$	
Vế trái		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của (3) là: $S = (-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}) \cup (1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2})$.

Bài 3. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} < \frac{3}{x-3}$ (1)

b) $\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2} \le \frac{-4}{x^2+2x}$ (2)

c) $\frac{x}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x+1} \le \frac{3-2x}{x^3-1}$ (3)

Giải

a) Ta có: $(1) \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)+2(x-1)(x-3)-3(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{-4x+6}{(x-1)(x-2)(x-3)} < 0$ (*)

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình (*).

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		3		$+\infty$
$-4x+6$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	

Vậy tập nghiệm của (1) là: $S = (-\infty; 1) \cup (\frac{3}{2}; 2) \cup (3; +\infty)$.

b) Ta có:

$(2) \Leftrightarrow \frac{4x+x^2+2x+8}{2(x^2+2x)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+8}{x^2+2x} \le 0$ (*)

Bảng xét dấu vế trái của (*).

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$x^2 + 6x + 8$		+	0	−	0	+	|	+	
$x^2 + 2x$		+	|	+	0	−	0	+	
Vế trái		+	0	−	‖	−	‖	+	

Vậy tập nghiệm của (2) là: $S = [-4; -2) \cup (-2; 0)$.

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow \dfrac{x(x^2 + x + 1) - (2x + 3)(x - 1) - (3 - 2x)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3 - x^2 + 2x}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x^2 - x + 2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{x - 1} \le 0$ (vì $x^2 - x + 2 > 0$; $x^2 + x + 1 > 0$, $\forall x$) $\Leftrightarrow 0 \le x < 1$.

Vậy tập nghiệm của (3) là: $S = [0; 1)$

ıi 4. Giải các hệ bất phương trình.

a) $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ \dfrac{2x - 1}{x + 3} > 2 \end{cases}$ (1) ; b) $\begin{cases} x^2 - 7x + 6 \le 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \end{cases}$ (2)

c) $-4 \le \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \le 1$ (3)

Giải

a) Ta có: $x^2 - x - 12 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 4$ (*)

$\dfrac{2x - 1}{x + 3} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{2x - 1}{x + 3} - 2 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{-7}{x + 3} > 0$

$\Leftrightarrow x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ (**)

Kết hợp (*) và (**) suy ra hệ (1) vô nghiệm.

b) Bảng xét dấu vế trái của hai bất phương trình của hệ.

x	$-\infty$		1		3		5		6		$+\infty$
$x^2 - 7x + 6$		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
$x^2 - 8x + 15$		+	|	+	0	−	0	+	|	+	

Vậy tập nghiệm của (2) là: $S = [1; 3) \cup (5; 6]$.

c) Ta có: (3) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \le 1 \\ \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2 + 1} \ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 7 \le x^2 + 1 \\ x^2 - 2x - 7 \ge -4x^2 - 4 \end{cases}$

(Vì $x^2 + 1 > 0, \forall x$). $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 8 \geq 0 \\ 5x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{cases}$

Bảng xét dấu các vế trái của các bất phương trình trên.

x	$-\infty$		-4		$-\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$2x + 8$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$5x^2 - 2x - 3$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của (3) là: $S = [-4; -\frac{3}{5}] \cup [1; +\infty)$.

Bài 5. Tìm tập xác định của các hàm số.

a) $y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$ b) $y = \sqrt{\frac{-x^2 - 8x - 12}{x - 5}}$ c) $y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4}}$

Giải

a) Điều kiện: $-x^2 + 6x - 5 \geq 0$ (1)

Bảng xét dấu của: $-x^2 + 6x - 5$.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$-x^2 + 6x - 5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy (1) có tập nghiệm: $S = [1; 5]$.

Tập xác định của hàm số: $D = [1; 5]$.

b) Điều kiện: $\frac{-x^2 - 8x - 12}{x - 5} \geq 0$ (*)

Bảng xét dấu vế trái của bất phương trình.

x	$-\infty$		-6		-2		5		$+$
$-x^2 - 8x - 12$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	
$x - 5$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Vậy tập nghiệm của (*) là: $S = (-\infty; -6] \cup [-2; 5)$.

Tập xác định của hàm số: $D = (-\infty; -6] \cup [-2; 5)$.

c) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 2x - 15 \geq 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq -3 \\ x \geq 5 \end{array}\right. \\ x \neq -4 \end{cases}$

Tập xác định của hàm số: $D = (-\infty; -4) \cup (-4; -3] \cup [5; +\infty)$.

i 6. Giải các hệ bất phương trình.

a) $\sqrt{\dfrac{6+x-x^2}{2x+5}} \le \sqrt{\dfrac{6+x-x^2}{x+4}}$ (1) ; b) $\sqrt{\dfrac{12+x-x^2}{x-11}} \le \sqrt{\dfrac{12+x-x^2}{2x-9}}$ (2)

c) $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2} \ge 0$ (3)

(Đề thi đại học, cao đẳng, khối D – 2002).

Giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} 6+x-x^2 \ge 0 \\ x \ne -\dfrac{5}{2} \\ x \ne -4 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 3.$

- Ta thấy: $x = -2$ hoặc $x = 3$: là nghiệm của (1).
- Nếu $-2 < x < 3$ thì $\sqrt{6+x-x^2} > 0$; $2x + 5 > 0$ và $x + 4 > 0$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 2x + 5 \ge x + 4 \Leftrightarrow x \ge -1$.

Kết hợp các kết quả, ta được: $-1 \le x \le 3$.

Đáp số: $S = \{-2\} \cup [-1; 3]$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 12+x-x^2 \ge 0 \\ x \ne 11 \\ x \ne \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 4.$

- Ta thấy: $x = -3$ hoặc $x = 4$ đều là nghiệm của (2).
- Nếu $-3 < x < 4$ thì $x - 11 < 0$; $2x - 9 < 0$, còn $\sqrt{12+x-x^2} > 0$.

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow 2x - 9 \ge x - 11 \Leftrightarrow x \ge -2$.

Kết hợp các kết quả, ta được: $-2 \le x < 4$.

Đáp số: $S = \{-3\} \cup [-2; 4]$.

c) • Ta có: $2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array}\right.$

- Ta thấy: $x = 2; -\dfrac{1}{2}; 3$ là các nghiệm của (3).
- Nếu $x \ne 2; -\dfrac{1}{2}; 3$, ta có:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{2} \\ x > 2 \end{array}\right. \\ x < 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{2} \\ x > 3 \end{array}\right.$$

Đáp số: $S = (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

Bài 7. Tìm m để các hệ sau có nghiệm.

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1} < \dfrac{x-4}{x+2} & (1) \\ x^2 - (m+1)x + m \le 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x-1} - \dfrac{x-4}{x+2} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{10x+2}{(x-1)(x+2)} < 0$ (*)

Bảng xét dấu vế trái của (*):

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{5}$		1		$+\infty$
$10x + 2$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$		
$x - 1$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$		
$x + 2$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$		
Vế trái	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$		

Vậy $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ -\dfrac{1}{5} < x < 1 \end{array}\right.$ (S_1)

Ta có: $x^2 - (m+1)x + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = m \end{array}\right.$

- Nếu $m \ge 1$, ta có: $(2) \Leftrightarrow 1 \le x \le m$. (S_2)

  Ta thấy: $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Hệ vô nghiệm với $m \ge 1$.
- Nếu $m < 1$, ta có: $(2) \Leftrightarrow m \le x \le 1$ (S_3)

  Ta thấy: $S_1 \cap S_3 \ne 0$. Vậy hệ có nghiệm với $m < 1$.

Bài 8. Giải và biện luận các bất phương trình sau.

a) $x^2 - mx + m + 3 > 0$ (1) ; b) $x^2 - 2mx + 2 - m \le 0$ (2)

c) $mx^2 - 2x + 4 > 0$ (3)

Giải

a) • $\Delta = m^2 - 4m - 12 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 6$.

Khi đó (1) luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

• $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 6 \end{array}\right.$

+ $m = -2$: $(1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

+ $m = 6$: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

• $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < -2 \end{array}\right.$

Khi đó vế trái có hai nghiệm: $x = \dfrac{m \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{m + \sqrt{\Delta}}{2} \\ x < \dfrac{m - \sqrt{\Delta}}{2} \end{array}\right.$$

Đáp số: $-2 < m < 6$: $S = \mathbb{R}$

$m = -2$: $S = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

$m = 6$: $S = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.

$m > 6$ hoặc $m < -2$:

$$S = (-\infty; \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m - 12}}{2}) \cup (\frac{m + \sqrt{m^2 - 4m - 12}}{2}; +\infty).$$

b) • $\Delta' = m^2 + m - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

• $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -2 \end{array}\right.$

Khi đó vế trái có hai nghiệm $x = m \pm \sqrt{m^2 + m - 2}$

$(2) \Leftrightarrow m - \sqrt{m^2 + m - 2} \le x \le m + \sqrt{m^2 + m - 2}$.

Đáp số: $-2 < m < 1$: $S = \varnothing$

$m \le -2$ hoặc $m \ge 1$: $S = [m - \sqrt{m^2 + m - 2}; m + \sqrt{m^2 + m - 2}]$.

c) Ta có: $\begin{cases} a = m \\ \Delta' = 1 - 4m \end{cases}$

Bảng xét dấu của a và Δ.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
a = m		−	0	+	|	+	
$\Delta' = 1 - 4m$		+	|	+	0	−	

• $m < 0$: Ta có: $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Vế trái có hai nghiệm: $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4m}}{m}$;

ở đó $\dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{m} < \dfrac{1-\sqrt{1-4m}}{m}$

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow \dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{m} < x < \dfrac{1-\sqrt{1-4m}}{m}$.

≠ $m = 0$: Ta có: (3) $\Leftrightarrow -2x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 2$.

• $0 < m < \dfrac{1}{4}$: Ta có: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Tương tự: (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1-\sqrt{1-4m}}{m} \\ x > \dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{m} \end{array}\right.$

(Vì $0 < m < \dfrac{1}{4}$ nên $\dfrac{1-\sqrt{1-4m}}{m} < \dfrac{1+\sqrt{1-4m}}{m}$).

• $m = \dfrac{1}{4}$: Ta có: $\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} > 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Vậy (3) luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

• $m > \dfrac{1}{4}$: Ta có: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

Khi đó (3) luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$

Bài 9. Tìm các giá trị của m để phương trình:

$$x^4 + 2(m+1)x^2 + 9m - 5 = 0$$

có: a) Bốn nghiệm phân biệt.

b) Hai nghiệm phân biệt.

c) Một nghiệm.

Giải

Đặt $y = x^2$; $y \geq 0$. Ta có phương trình:

$$y^2 + 2(m + 1)y + 9m - 5 = 0 \qquad (*)$$

a) Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 > 0 \\ 9m - 5 > 0 \\ m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ m > \dfrac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{5}{9} < m < 1 \\ m > 6 \end{array}\right.$$

Đáp số: $\dfrac{5}{9} < m < 1$ hay $m > 6$.

b) Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm dương hoặc có hai nghiệm trái dấu.

• Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 6 \end{array}\right.$

– $m = 1$: $(*) \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ (loại).

– $m = 6$: $(*) \Leftrightarrow y^2 + 14y + 49 = 0 \Leftrightarrow y = -7$ (loại).

• Nếu $P < 0 \Leftrightarrow 9m - 5 < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{5}{9}$.

Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Rightarrow$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Đáp số: $m < \dfrac{5}{9}$.

c) Phương trình đã cho có đúng một nghiệm khi (*) có nghiệm kép bằng 0 hoặc có một nghiệm âm, còn một nghiệm bằng 0.

• $\Delta' = 0$ (đã xét).

• Phương trình (*) nhận $y = 0$ là nghiệm $\Rightarrow m = \dfrac{5}{9}$.

Thế vào (*), ta được: $y^2 + \dfrac{28}{9}y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\dfrac{28}{9} \end{array}\right.$

Vậy $m = \dfrac{5}{9}$ thỏa điều kiện vừa nêu.

Đáp số: $m = \dfrac{5}{9}$.

Bài 10. Tìm m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) $\left|\dfrac{x^2+mx+1}{x^2+1}\right| \le 1$ (1) b) $\left|\dfrac{3x^2+x+4}{x^2-mx+1}\right| \ge 2$ (2)

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow |x^2+mx+1| \le 2(x^2+1)$: $\forall x \in \mathbb{R}$ (vì $x^2+1>0\ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx+1 \le 2x^2+2 \\ x^2+mx+1 \ge -2x^2-2 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx+1 \ge 0 \\ 3x^2+mx+3 \ge 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1 \le 0 \\ \Delta_2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4 \le 0 \\ m^2-36 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \le 2 \\ |m| \le 6 \end{cases} \Leftrightarrow |m| \le 2.$$

b) Điều kiện: $x^2-mx+1 \ne 0 \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2-4<0$

$\Leftrightarrow |m| < 2.$

Khi đó $x^2-mx+1>0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy: (2) $\Leftrightarrow |3x^2+x+4| \ge 2(x^2-mx+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x^2+x+4 \ge 2(x^2-mx+1) \\ 3x^2+x+4 \le -2(x^2-mx+1) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2+(2m+1)x+2 \ge 0 & (*) \\ 5x^2+(1-2m)x+6 \le 0 & (**) \end{bmatrix}$$

Xét (*): Bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 \\ \Delta_1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2+4m-7<0 \Leftrightarrow \frac{-1-2\sqrt{2}}{2} < m < \frac{-1+2\sqrt{2}}{2}.$$

Xét (**): Bất phương trình (**) nếu có $\Delta_2 < 0$ sẽ vô nghiệm; nếu có $\Delta_2 \ge 0$ sẽ có một tập nghiệm không thể là $\mathbb{R}$.

Đáp số: $\dfrac{-1-2\sqrt{2}}{2} < m < \dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}$.

§8. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$; **2.** $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^2 \end{cases}$

3. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$; **4.** $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

5. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$; **6.** $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow (1)$

Cách thứ nhất: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{cases}$

(Nếu xét dấu của g(x) đơn giản)

Cách thứ hai: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$

(Nếu xét dấu của f(x) đơn giản).

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình.

a) $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$ (1) ; b) $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$ (2)

a) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ 15 - x + 2\sqrt{(15-x)(3-x)} + 3 - x = 36 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ \sqrt{(15-x)(3-x)} = x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -9 \\ x \leq 3 \\ x^2 - 18x + 45 = x^2 + 18x + 81 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 3 \\ 36x = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq x \leq 3 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$

b) $(2) \Leftrightarrow \sqrt{3x+7} = 2 + \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3x + 7 = 4 + 4\sqrt{x+1} + x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} = x + 1 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+1) = (x+1)^2 \\ x \geq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1-4) = 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

Đáp số: S = {−1; 3}.

Bài 2. Giải phương trình: $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1 - x$ (*)

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{2}{3} \\ x^2 - (3x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{2}{3} \\ (x-1)(x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \dfrac{2}{3} \\ x - 1 = 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x > \dfrac{2}{3} \\ \sqrt{3x-2} = 2 - x \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Giải (1): (1) $\Leftrightarrow x = 1$

Giải (2): $\begin{cases} \dfrac{2}{3} < x \le 2 \\ 3x - 2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} < x \le 2 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} < x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Đáp số: $x = 1$.

Bài 3. Giải các phương trình.

a) $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \dfrac{x+3}{2}$

b) $\sqrt{x - 2 + \sqrt{2x-5}} + \sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

Giải

a) Đặt $y = \sqrt{x-1}$; $y \ge 0 \Rightarrow y^2 = x - 1 \Rightarrow x = y^2 + 1$.

Ta có phương trình: $\sqrt{y^2 + 2y + 1} + \sqrt{y^2 - 2y + 1} = \dfrac{y^2+4}{2}$

$\Leftrightarrow (y + 1) + |y - 1| = \dfrac{y^2+4}{2}$ (*)

- Nếu $0 \le y \le 1$.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow y + 1 - (y - 1) = \dfrac{y^2+4}{2} \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ (nhận).

Khi đó: $x = 1$.

- Nếu $y \ge 1$.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow y + 1 + y - 1 = \dfrac{y^2+4}{2} \Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2.$

Khi đó: x = 5. Đáp số: S = {1; 5}.

b) Đặt $y = \sqrt{2x-5}$; $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = 2x - 5 \Rightarrow x = \dfrac{y^2+5}{2}$.

Ta có phương trình: $\sqrt{\dfrac{y^2+1}{2} + y} + \sqrt{\dfrac{y^2+9}{2} + 3y} = 7\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y+3)^2} = 14 \Leftrightarrow y + 1 + y + 3 = 14$ (vì $y \geq 0$)

$\Leftrightarrow y = 5$. Vậy x = 15. Đáp số: S = {15}.

Bài 4. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2+4x-5} < 10 - 2x$ (1) b) $\sqrt{x^2+x-12} > x$ (2)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 \geq 0 \\ 10 - 2x > 0 \\ x^2 + 4x - 5 < 100 - 40x + 4x^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 \geq 0 \\ x < 5 \\ 3x^2 - 44x + 105 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ \left[\begin{array}{l} x \leq -5 \\ x \geq 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{35}{3} \\ x < 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -5 \\ 1 \leq x < 3 \end{array}\right.$

Đáp số: Tập nghiệm S = $(-\infty; -5] \cup [1; 3)$.

b) (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + x - 12 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x - 12 \geq x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ x \leq -4 \end{array}\right. \\ x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x > 12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -4 \\ x > 12 \end{array}\right.$

Đáp số: Tập nghiệm S = $(-\infty; -4] \cup (12; +\infty)$.

Bài 5. Giải các bất phương trình.

a) $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} \leq \sqrt{x-2}$ (1) ; b) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} < \sqrt{x-2}$ (2)

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq x-1+x-2+2\sqrt{(x-1)(x-2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2\sqrt{x^2-3x+2} \geq 3-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ 3x^2-6x-1 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 3 \\ \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ \left[\begin{array}{l} x \geq \dfrac{3+2\sqrt{3}}{2} \\ x \leq \dfrac{3-2\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq \frac{3+2\sqrt{3}}{2}.$$

b) Nếu $x \geq 2$ thì $x+3 > x-1 > 0$

$\Rightarrow \sqrt{x+3} > \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > 0.$

Ta có: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+3+x-1-2\sqrt{(x+3)(x-1)} < x-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2\sqrt{(x+3)(x-1)} > x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4(x+3)(x-1) > (x+4)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 3x^2-28 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Bài 6. Giải bất phương trình : $\dfrac{\sqrt{x^2+3x-4}+7-3x}{x-3} < -1$ (1)

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2+3x-4}+4-2x}{x-3} < 0$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4}+4-2x < 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} < 2x-4 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-4 < (2x-4)^2 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-19x+20 > 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 5 \\ x < \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5.$$

- Trường hợp 2: $\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-4} > 2x-4 \ (*) \\ x < 3 \end{cases}$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+3x-4\geq 0\\2x-4<0\end{cases}\\\begin{cases}2x-4\geq 0\\x^2+3x-4>(2x-4)^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 1\vee x\leq -4\\x<2\end{cases}\\\begin{cases}x\geq 2\\\dfrac{4}{3}<x<5\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -4\\1\leq x<2\\2\leq x<5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq -4\\1\leq x<5\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $x < 3$, ta được: $x \leq -4$ hoặc $1 \leq x < 3$.

Đáp số: Tập nghiệm $S = (-\infty; -4] \cup [1; 3)$.

Bài 7. Giải các phương trình.

a) $|x^2 - 1| = x^2 - 2x + 8$ (1) ; b) $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 4$ (2)

Giải

a) Vì $x^2 - 2x + 8 = (x - 1)^2 + 7 \geq 7 \geq 0\ \forall x$.

Ta có:

(1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-1=x^2-2x+8\\x^2-1=-(x^2-2x+8)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=9\\x^2-2x+7=0 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$.

b) $(2) \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-4\geq 0\\\left[\begin{array}{l}x^2-5x+4=x^2-4\\x^2-5x+4=-(x^2-4)\end{array}\right.\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4\geq 0\\5x=8\end{cases} \text{(vô nghiệm)}\\\begin{cases}x^2-4\geq 0\\2x^2-5x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}|x|\geq 2\\x=0\vee x=\dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

Bài 8. Giải các bất phương trình.

a) $|x^2 - 3x + 2| \leq 2x - x^2$ (1) ; b) $\dfrac{|x-2|}{x^2-5x+6} \geq 3$ (2)

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-3x+2\leq 2x-x^2\\x^2-3x+2\geq x^2-2x\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x^2 - 5x + 2 \le 0 \\ -x + 2 \ge 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \le x \le 2 \\ x \le 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x \le 2.$$

Đáp số: Tập nghiệm S = $(-\infty; 2]$.

b) (2) $\Leftrightarrow \dfrac{|x-2| - 3x^2 + 15x - 18}{x^2 - 5x + 6} \ge 0$ (*)

Điều kiện $x^2 - 5x + 6 \ne 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \ne 2 \\ x \ne 3 \end{bmatrix}$

• Nếu $x > 2$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{x - 2 - 3x^2 + 15x - 18}{x^2 - 5x + 6} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 16x - 20}{x^2 - 5x + 6} \ge 0 \quad (**)$$

Bảng xét dấu vế trái của (**).

x	$-\infty$		2		3		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
$-3x^2 + 16x - 20$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
Vế trái		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Vậy (**) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x < 2 \\ 3 < x \le \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

Kết hợp điều kiện $x > 2$, ta có: $3 < x \le \dfrac{10}{3}$.

• Nếu $x < 2$.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{-x + 2 - 3x^2 + 15x - 18}{x^2 - 5x + 6} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 14x - 16}{x^2 - 5x + 6} \ge 0 \quad (***)$$

Bảng xét dấu vế trái của (***).

x	$-\infty$		2		$\frac{8}{3}$		3		+∞
$-3x^2 + 14x - 16$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$x^2 - 5x + 6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Vế trái		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Vậy (***) $\Leftrightarrow \dfrac{8}{3} \le x < 3$.

Vì $x < 2$ nên trường hợp này bất phương trình vô nghiệm.

Đáp số: Tập nghiệm S = $(3; \dfrac{10}{3}]$.

Bài 9. Giải phương trình.

a) $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$; b) $\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{(1+x)(3-x)} = 2$.

Giải

a) Đặt $y = \sqrt{x+5}$; $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x + 5$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y^2 = x + 5 \\ x^2 + y = 5 \end{cases}$ (*)

Trừ vế cho vế hai phương trình, ta được:

$$x^2 - y^2 + y = -x \Leftrightarrow (x+y)(x-y+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right.$$

• $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$: vì $y \geq 0$ nên $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$.

Thế y vào (*): $x^2 - x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$

Vì $x \leq 0$, nên ta lấy $x = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}$.

• $x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1$: vì $y \geq 0 \Rightarrow x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

Thế y vào (*): $x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Vì $x \geq -1$, nên ta lấy $x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

Đáp số: $x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$; $\dfrac{1 - \sqrt{21}}{2}$.

b) *Cách 1*: Đặt $u = \sqrt{1+x}$; $u \geq 0 \geq u^2 = 1 + x \Rightarrow x = u^2 - 1$ (1)

$v = \sqrt{3-x}$; $v \geq 0 \Rightarrow v^2 = 3 - x \Rightarrow x = 3 - v^2$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow u^2 - 1 = 3 - v^2 \Rightarrow u^2 + v^2 = 4$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u + v + u.v = 2 \\ u^2 + v^2 = 4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} S = u + v \\ P = u.v \end{cases}$; $S^2 - 4P \geq 0$; $S \geq 0$; $P \geq 0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} S + P = 2 \\ S^2 - 2P = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 - S \\ S^2 - 2(2 - S) = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = -4 \text{ (loại)} \\ P = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} S = 2 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ u.v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 \\ v = 0 \end{cases}$$

Ta được: $x = -1; 3$.

Cách 2: Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \le \sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{1+x})^2 + (\sqrt{3-x})^2]}$

$$\le \sqrt{2.4} = 2\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow 0 < t \le 2\sqrt{2}$ (1)

$\Rightarrow t^2 = 1 + x + 3 - x - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Rightarrow \dfrac{t^2-4}{2} = \sqrt{(1+x)(3-x)}$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow t + \dfrac{t^2-4}{2} = 2 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t =$

So với (1) $\Rightarrow t = 2$.

• $\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2 \Leftrightarrow 1 + x + 3 - x + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1+x)(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Đáp số: $x = -1$ hay $x = 3$.

Bài 10. Giải và biện luận phương trình : $\sqrt{x^2 - x} = m - x$ (*)

Giải

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \le m \\ x^2 - x = (m-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le m \\ (2m-1)x = m^2 \quad (**) \end{cases}$$

• Trường hợp 1: $m = \dfrac{1}{2}$. Hệ vô nghiệm.

• Trường hợp 2: $m \ne \dfrac{1}{2}$. $(**) \Leftrightarrow x = \dfrac{m^2}{2m-1}$

Xét $\dfrac{m^2}{2m-1} \le m \Leftrightarrow \dfrac{m^2}{2m-1} - m \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-m^2+m}{2m-1} \le 0.$

Xét dấu $\dfrac{-m^2+m}{2m-1}$.

m	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-m^2+m$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
$2m-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-m^2+m}{2m-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Vậy $\frac{-m^2+m}{2m-1} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le m < \frac{1}{2} \\ m \ge 1 \end{array}\right.$

Khi đó phương trình có nghiệm: $x = \frac{m^2}{2m-1}$.

ài 11. Tìm m để bất phương trình: $x^2 - 2mx + 2|x - m| + 2 \ge 0$

luôn luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

Giải

Đặt $t = |x - m|$, $t \ge 0 \Rightarrow t^2 - m^2 = x^2 - 2mx$

Bất phương trình: $t^2 + 2t + 2 - m^2 \ge 0 \Leftrightarrow (t+1)^2 \ge m^2 - 1$ (*)

Vì $t \ge 0 \Rightarrow (t+1)^2 \ge 1$

Bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall t \ge 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \le 1$

$\Leftrightarrow m^2 \le 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$.

Đáp số: $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

ài 1. a) Chứng minh các bất đẳng thức $\frac{1}{2} \le \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \le \frac{3}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Cho a, b, c $\in [-1; 2]$ và a + b + c = 0

Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \le 6$.

Giải

a) Ta có: $\frac{x^2+x+1}{x^2+1} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 \le 3x^2 + 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$ (luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).

Chứng minh tương tự: $\frac{1}{2} \le \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Ta có: $a \in [-1; 2] \Rightarrow -1 \le a \le 2 \Rightarrow \begin{cases} a \ge -1 \\ a \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+1 \ge 0 \\ a-2 \le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (a+1)(a-2) \le 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 \le 0$ (1)

Tương tự: $b^2 - b - 2 \le 0$ (2); $c^2 - c - 2 \le 0$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c) - 6 \le 0$

mà $a + b + c = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 6$ (đpcm).

ài 2. Chứng minh rằng nếu $5x + 2y = 10$ (1)

Thì $3xy - x^2 - y^2 < 7$ (*)

Giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow y = 5 - \frac{5}{2}x$. Thế vào (*) ta được:

$$-59x^2 + 160x - 128 < 0 (**)$$

Ta có: $a = -58 < 0$ và $\Delta' = -1152 < 0 \Rightarrow$ (**) luôn đúng $\forall x$.

Bài 3. Cho $x_1 \geq 0$ là một nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ (2) có một nghiệm x và $x_1 + x_2 \geq 2$.

Giải

Vì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm nên $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, nên (2) cũng có nghiệm.

Ta lấy, chẳng hạn: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0$ và $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$.

$$\Rightarrow x_1x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}\right) = \frac{4ac}{4ac} = 1$$

Vì $x_1 > 0$ nên $x_2 > 0$.

Theo bất đẳng thức Côsin, ta có: $x_1 + x_2 \geq 2\sqrt{x_1.x_2} = 2$ (đpcm).

Nếu chọn $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, chứng minh tương tự.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$P = xy + \frac{1}{xy} \quad (x > 0; y > 0; x + y = 1).$$

Giải

Theo bất đẳng thức Côsin, ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 1 \geq 2\sqrt{xy}$

$$\Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}. \quad \text{Vì } x > 0, y > 0 \Rightarrow 0 < xy \leq \frac{1}{4}.$$

Đặt $t = xy$; $0 < t \leq \frac{1}{4}$. Ta có:

$$P = t + \frac{1}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - Pt + 1 = 0 \qquad (*)$$

Điều kiện $\Delta \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq 2$ (vì $t > 0 \Rightarrow P > 0$).

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow t = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4}}{2}$

• Xét $t = \dfrac{P + \sqrt{P^2 - 4}}{2}$ và $0 < t \le \dfrac{1}{4}$.

$\Leftrightarrow 0 < \dfrac{P + \sqrt{P^2 - 4}}{2} \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \sqrt{P^2 - 4} \le \dfrac{1}{2} - P$ (loại vì $P \ge 2$).

• Xét $t = \dfrac{P - \sqrt{P^2 - 4}}{2}$ và $0 < t \le \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{P - \sqrt{P^2 - 4}}{2} \le \dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P > \sqrt{P^2 - 4} \\ P - \sqrt{P^2 - 4} \le \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 > -4 \text{ (luôn đúng)} \\ \sqrt{P^2 - 4} \ge P - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow P^2 - 4 \ge P^2 - P + \dfrac{1}{4}$ (vì $P \ge 2 \Rightarrow P - \dfrac{1}{2} > 0$)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{17}{4}$. Khi đó $t = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

a) $P = |x + 1| + |x + 2| + |2x - 4|$; b) $Q = |x + 1| + |2x + 3|$

c) $R = |x - 1| + |y - 3|$; với $|x| + |y| = 5$.

Giải

a) Ta có: $P = |x + 1| + |x + 2| + |4 - 2x| \ge |x + 1 + x + 2 + 4 - 2x| = 7$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 7, đạt được, chẳng hạn tại $x = 0$.

b) Ta có: $Q = |x + 1| + |-2x - 3| \ge |x + 1| + \dfrac{1}{2}|-2x - 3|$

$$\ge \left|x + 1 - \frac{1}{2}(2x + 3)\right| = \left|x + 1 - x - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\dfrac{1}{2}$, đạt được khi $x = -\dfrac{3}{2}$.

c) Ta có: $|a| - |b| \le |a + b|$ nên: $R = |x - 1| + |y - 3| \ge |x| - |1| + |y| - |3|$

$= 5 - 4 = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của R là 1, đạt được khi $x = 1; y = 4$.

Bài 6. Giải các phương trình.

a) $|x^2 - x - 1| + |x^2 - x - 3| = 6$; b) $|x^2 + x| + |x + 2| = x^2 - 2$ (1)

Giải

a) Đặt $t = x^2 - x$. Ta có phương trình: $|t - 1| + |t - 3| = 6$ (*)

Bảng xét dấu của $t - 1$ và $t - 3$.

t	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$t-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$t-3$		$-$		$-$	0	$+$	

• $t \le 1$: $(*) \Leftrightarrow -t+1-t+3=6 \Leftrightarrow -2t=2 \Leftrightarrow t=-1$ (nhận).

Vậy: $x^2-x=-1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (vô nghiệm).

• $1 < t \le 3$: $(*) \Leftrightarrow t-1-t+3=6$ (vô nghiệm).

• $t > 3$: $(*) \Leftrightarrow t-1-t+t-3=6$ $t=5$ (nhận).

Vậy: $x^2-x=5 \Leftrightarrow x^2-x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{2}$.

$x^2-x=-1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x=\varnothing$.

b) Bảng xét dấu của x^2+x và $x+2$.

t	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
x^2+x		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	

• $x \le -2$:

(1) $\Leftrightarrow x^2+x-(x+2)=x^2-2 \Leftrightarrow -2=-2$ (luôn đúng $\forall x \le -2$).

• $-2 < x \le -1$:

(1) $\Leftrightarrow x^2+x+x+2=x^2-2 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$ (loại).

• $-1 < x < 0$:

(1) $\Leftrightarrow -(x^2+x)+x+2=x^2-2 \Leftrightarrow 2x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$ (loại)

• $x > 0$:

(1) $\Leftrightarrow x^2+x+x+2=x^2-2 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-2$ (loại).

Đáp số: Tập nghiệm $=(-\infty;-2]$.

Bài 7. Giải các phương trình.

a) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=4$ (1)

b) $\sqrt{2x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-2x-2}=2$; c) $\sqrt{3x^2+6x+1}+x^2+2x=13$.

Giải

a) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 2x+3+x-2+2\sqrt{2x+3}\sqrt{x-2}=16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ 2\sqrt{(2x+3)(x-2)}=3(5-x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ 4(2x^2-x-6)=9(x^2-10x+25) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ x^2 - 86x + 249 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 83 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

b) Đặt $t = x^2 - 2x$. Ta có phương trình:

$$\sqrt{2t+3} - \sqrt{t-2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{2t+3} = 2 + \sqrt{t-2} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 2 \\ 4\sqrt{t-2} = t+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 2 \\ 16(t-2) = (t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 2 \\ t^2 - 14t + 33 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = 11 \end{array}\right. \end{cases}$$

• $t = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

• $t = 11 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 11 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm 2\sqrt{3}$.

Đáp số: $x = -1; 3; 1 \pm 2\sqrt{3}$.

c) Đặt $t = x^2 + 2x$. Ta có phương trình:

$$\sqrt{3t+1} + t = 13 \Leftrightarrow \sqrt{3t+1} = 13 - t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \le 13 \\ 3t + 1 = 169 - 26t + t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 13 \\ t^2 - 29t + 168 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 13 \\ \left[\begin{array}{l} t = 21 \\ t = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = 8.$$

Vậy $x^2 + 2x = 8 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Đáp số: $x = -4; 2$.

ài 9. Giải các bất phương trình.

a) $\dfrac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \ge 2$;

b) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 8x + 15}} + \sqrt{x^2 + 2x - 15} > \sqrt{4x^2 - 18x + 18}$

Giải

a) Đặt $t = \sqrt{2-x}$; $t \ge 0 \Rightarrow t^2 = 2 - x \Rightarrow x = 2 - t^2$.

Ta có bất phương trình: $\begin{cases} \dfrac{t + 4(2-t^2) - 3}{2 - t^2} \ge 2 \\ t \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2t^2 - t - 1}{t^2 - 2} \ge 0 \\ t \ge 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(t+\dfrac{1}{2})(t-1)}{(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})} \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t-1}{t-\sqrt{2}} \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t > \sqrt{2} \\ t \leq 1 \end{array}\right. \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 1 \\ t > \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy: $\begin{cases} 0 \leq \sqrt{2-x} \leq 1 \\ \sqrt{2-x} > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 2-x \leq 1 \\ 2-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x < 0 \end{cases}$

Đáp số: Tập nghiệm: $S = (-\infty; 0) \cup [1; 2]$.

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = (x-3)(x-5) \geq 0 \\ x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3) \geq 0 \\ 4x^2 - 18x + 18 = (x-3)(4x-6) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -5 \\ x = 3 \\ x \geq 5 \end{array}\right.$$

- Ta thấy $x = 3$ không là nghiệm.
- Xét $x \leq -5$ hoặc $x \geq 5 \Leftrightarrow |x| \geq 5$.

Khi đó, bình phương hai vế, ta được:

$$\sqrt{(x-3)^2(x^2-25)} > (x-3)^2 \Leftrightarrow (x-3)^2(x^2-25) > (x-3)^4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 > (x-3)^2 \Leftrightarrow x > \frac{17}{3}$$

Kết hợp với $|x| \geq 5$, ta có: $x > \dfrac{17}{3}$.

Đáp số: Tập nghiệm là $S = (\dfrac{17}{3}; +\infty)$.

Bài 10. Giải và biện luận bất phương trình.

$$\sqrt{x-m} - \sqrt{x-2m} > \sqrt{x-3m} \qquad (1)$$

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-m} > \sqrt{x-2m} + \sqrt{x-3m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2m \geq 0 \\ x - 3m \geq 0 \\ x - m > x - 2m + 2\sqrt{(x-2m)(x-3m)} + x - 3m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m \\ x \geq 3m \\ 2\sqrt{(x-2m)(x-3m)} < 4m - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m \\ x \geq 3m \\ x < 4m \\ 4(x-2m)(x-3m) < (4m-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m \\ x \geq 3m \\ x < 4m \\ 3x^2 - 12mx + 8m^2 < 0 \end{cases}$$

- Nếu $m \leq 0$. Hệ trên vô nghiệm.
- Nếu $m > 0$, ta có hệ:

$$\begin{cases} 3m \leq x < 4m \\ \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}m < x < \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}m \end{cases} \Leftrightarrow 3m \leq x < \frac{6+2\sqrt{3}}{3}m$$

Đáp số: Tập nghiệm $S = [3m; \dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}m)$.

Bài 11. a) Tìm m để phương trình $x^2 + (2 - m)x + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2 > -1$.

b) Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 5m + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn $x_1 \leq x_2 < 3$.

c) Tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + 3m - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1; x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 \leq x_2$.

Giải

a) Đặt $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$. Ta có phương trình:

$$(y - 1)^2 + (2 - m)(y - 1) + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow y^2 - my + m = 0$ (*). Giả sử y_1, y_2 là hai nghiệm của (*).

Điều kiện $x_1 > x_2 > -1 \Leftrightarrow y_1 > y_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m > 0 \\ m > 0 \\ m > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m > 4$.

b) Đặt $y = x - 3 \Rightarrow x = y + 3$. Ta có phương trình:

$(y + 3)^2 - 2(m + 1)(y + 3) + 5m + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2(2 - m)y - m + 4 = 0$ (*)

Gọi y_1, y_2 là hai nghiệm của (*).

Điều kiện $x_1 \leq x_2 < 3 \Leftrightarrow y_1 \leq y_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m \geq 0 \\ 4 - m > 0 \\ 2 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \vee m \geq 3 \\ m < 4 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

c) Đặt $y = x - 2 \Leftrightarrow x = y + 2$. Ta có phương trình:

$$(y + 2)^2 - 2m(y + 2) + 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2(2 - m)y - m = 0 \quad (*)$$

Gọi hai nghiệm của (*) là y_1, y_2.

Điều kiện $x_1 < 2 \leq x_2 \Leftrightarrow y_1 < 0 \leq y_2$.

• Nếu $y = 0$ là nghiệm của (*) $\Rightarrow m = 0$.

Ta có phương trình: $y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -4 \end{array}\right.$

Từ đó: $x_1 = -2 < 2 = x_2$ (thỏa điều kiện).

• $y_1 < 0 < y_2 \Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$. Đáp số: $m \geq 0$.

Bài 12. Với giá trị nào của m phương trình sau có nghiệm

$$mx + 1 - 2\sqrt{x - 2} = 0.$$

Giải

Đặt $y = \sqrt{x - 2}$; $y \geq 0 \Rightarrow y^2 = x - 2 \Rightarrow x = y^2 + 2$.

Ta có phương trình:

$$m(y^2 + 2) + 1 - 2y = 0 \Leftrightarrow my^2 - 2y + 2m + 1 = 0 \quad (*)$$

• $m = 0$ (*) $\Leftrightarrow -2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}$ (nhận).

• $m \neq 0$.

– Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu: $y_1 < 0 < y_2 \Leftrightarrow P < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2m + 1}{m} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0.$$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm, tính được từ: $x = y_2^2 + 2$

Phương trình (*) có nghiệm $y = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

– Phương trình (*) có hai nghiệm y_1, y_2 thỏa mãn $0 < y_1 \leq y_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 1 \geq 0 \\ \dfrac{2m + 1}{m} > 0 \\ \dfrac{2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{2}$$

Đáp số: $\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leq m \leq \dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Bài 13. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm $x - m \le \sqrt{x+m}$.

Giải

Đặt $y = \sqrt{x+m}$; $y \ge 0 \Rightarrow y^2 = x + m \Rightarrow x = y^2 - m$.

Ta có bất phương trình: $f(y) = y^2 - y - 2m \le 0$ (*)

• $\Delta = 1 + 8m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{8}$

Khi đó $f(y) > 0\ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

• $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{8}$.

$(*) \Leftrightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} \le 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$ (nhận). Vậy $m = -\frac{1}{8}$.

• $\Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{8}$

$(*) \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{1+8m}}{2} \le y \le \frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}$

Tập nghiệm của (*) là $S = \left[\frac{1-\sqrt{1+8m}}{2}; \frac{1+\sqrt{1+8m}}{2}\right]$:

vì $\frac{1+\sqrt{1+8m}}{2} > 0\ \forall m > -\frac{1}{8}$.

Nên $S \cap [0; +\infty) \ne \varnothing$. Vậy (*) luôn có nghiệm $y \ge 0$.

Đáp số: $m \ge -\frac{1}{8}$.

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

1. Cho $3x + 5y = 7$. Giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$ là:

A. $\frac{34}{40}$; B. $\frac{40}{34}$; C. $\frac{8}{7}$; D. $\frac{7}{8}$.

2. Cho $x^2 + y^2 = 1$. Giá trị lớn nhất của $P = x + y$ là:

A. 2; B. $\sqrt{2}$; C. 4; D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Cho $2x + 3y = 7$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 2x^2 + 3y^2$ là:

A. $\frac{49}{25}$; B. $\frac{5}{7}$; C. $\frac{5}{49}$; D. $\frac{49}{5}$.

4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x^2 + \frac{3}{x^2}$ $(x \neq 0)$ là:

A. 6; B. $2\sqrt{3}$; C. 3; D. $\sqrt{3}$.

5. Giá trị lớn nhất của hàm số: $y = x^3(8 - x^3)$ $\forall x \in [0; 2]$ là:

A. 4; B. $\sqrt{8}$; C. 16; D. 8.

6. Tập nghiệm của bất phương trình: $4 - x^2 \geq 0$ là:

A. $(-\infty; 2]$; B. $[2; +\infty)$;

C. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; D. $[-2; 2]$.

7. Tập nghiệm của bất phương trình: $-3x^2 - 5x + 8 < 0$ là:

A. $(-\infty; -\frac{8}{3}) \cup (1; +\infty)$; B. $(-\frac{8}{3}; 1)$;

C. $(-\frac{8}{3}; -1)$; D. $(-\infty; -1) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

8. Tìm m để biểu thức: $x^2 - 8x + m + 10 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Các giá trị m là:

A. $m < 6$; B. $m > 6$; C. $m \leq 16$; D. $m > -6$.

Đáp án

1. B; **2.** B; **3.** D; **4.** B;
5. C; **6.** D; **7.** A; **8.** B.

Chương V. THỐNG KÊ

§1 và §2. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU - TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức trình bày, phân tích và xử lí số liệu.

1. Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một mẫu

2. Số phần tử của một mẫu được gọi là kích thước của mẫu

3. Tập hợp các số liệu thu được sau khi điều tra trên mẫu gọi là một mẫu số liệu.

4. Số lần xuất hiện mỗi giá trị x_i trong mẫu được gọi là tần số của giá trị đó. Kí hiệu (n_i)

5. Tỉ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N được gọi là tần suất của giá trị x_i.

$$f_i = \frac{x_i}{N}$$

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Điểm kiểm tra môn toán của học sinh một lớp 10 người ta thu được mẫu số liệu sau:

9	2	5	4	2	7	8	6	6	8
7	7	4	5	9	6	8	7	7	5
5	9	8	5	6	8	7	9	2	5

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên.

Giải

a) • Dấu hiệu điều tra là: Điểm kiểm tra môn toán của học sinh một lớp 10.

• Kích thước mẫu là: 30

b) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là:

2; 3; 5; 6; 7; 8; 9

Bài 2. Điều tra về sự tiêu thụ điện năng (tính theo kW/h) của 32 gia đình ở một tổ dân phố, người ta thu được mẫu số liệu sau:

45	75	40	65	120	70	50	85
100	90	53	100	65	85	75	65
50	45	40	85	110	90	53	70
75	100	70	45	70	53	65	50

a) Dấu hiệu điều tra là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

c) Hãy lập bảng tần số – Tìm suất ghép lớp gồm 8 lớp với lớp đầu tiên là nửa khoảng [40; 50] lớp tiếp theo là [50; 60] và lớp cuối cùng là [110; 120]

d) Vẽ biểu đồ tần số hình cột

e) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột

Giải

a) Dấu hiệu là: Sự tiêu thụ điện năng (tính theo kVV/h) trong một tháng của một tổ dân phố.

Kích thước mẫu là 32

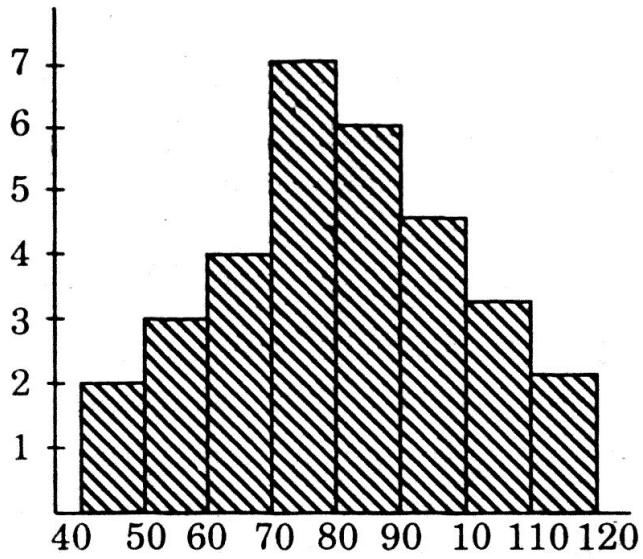
b) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là:

40; 45; 50; 53; 60; 65; 70; 75; 85; 90; 100; 110; 120

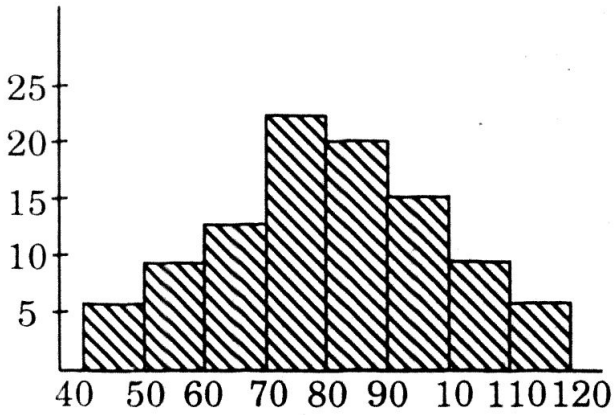
c) Lập bảng

Lớp	***Tần số***	***Tần suất (%)***
[40; 50)	2	6,25
[50; 60)	3	9,38
[60; 70)	4	12,5
[70; 80)	7	21,88
[80; 90)	6	18,75
[90; 100)	5	15,63
[100; 110)	3	9,38
[110; 120)	2	6,25
	N = 32	

d) Vẽ biểu đồ tần số hình cột



e) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột



Bài 3. Theo thời gian làm một bài toán (tính bằng phút) của 30 học sinh ta được bảng sau:

7,7	6,5	6,4	4,9	9	5,7	6,8	5,2	4	8,6
3,5	8,5	7,8	5,7	4,5	6,8	7,8	5,5	7,4	5,7
6	6,4	4,9	7,3	6,8	4,5	4,9	7,8	4,9	6,8
8,5	6,8	6	5,7	5,4	6	7,3	6	7,3	7,7

a) Dấu hiệu điều tra là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy lập bảng phân bố tần số – tần suất ghép lớp gồm 6 lớp với lớp đầu tiên là nửa khoảng [3,5; 4,5] lớp thứ hai là [4,5; 5,5)... (độ dài mỗi nửa khoảng là 1)

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột

d) Vẽ đường gấp khúc tần số

e) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt

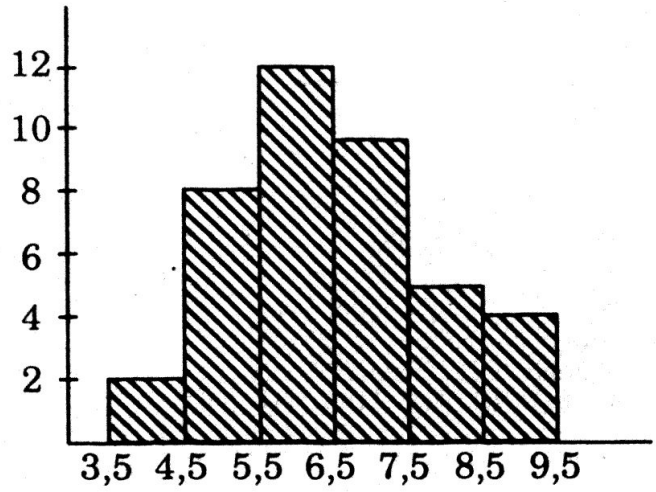
Giải

a) Dấu hiệu điều tra là: Thời gian làm một bài toán (tính bằng phút) của từng học sinh. Kích thước mẫu là 30

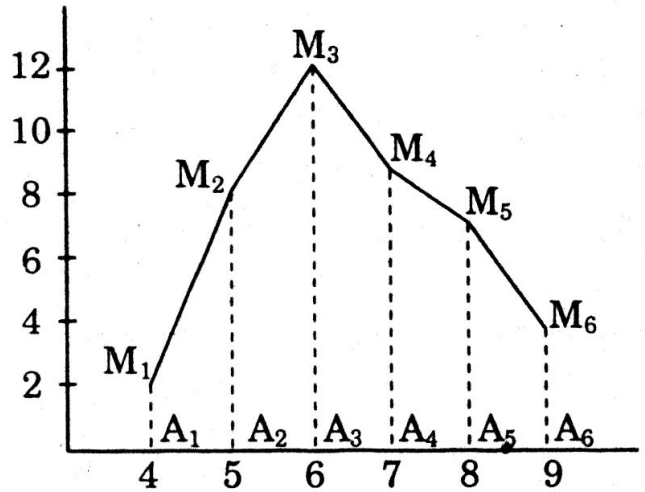
b) Lập bảng

Lớp	***Tần số***	***Tần suất (%)***
[3,5; 4,5)	2	5
[4,5; 5,5)	8	20
[5,5; 6,5)	12	30
[6,5; 7,5)	9	22,5
[7,5; 8,5)	5	12,5
[8,5; 9,5)	4	10
	N = 40	

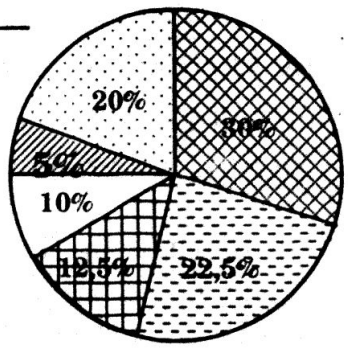
c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột



d) Vẽ đường gấp khúc tần số



e) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt



Bài 4. Cho các số liệu sau thống kê về chiều cao (đơn vị cm) của 32 học sinh lớp 10 của một trường THPT được ghi bảng sau:

163	165	164	163	164	158	168	164
167	169	165	169	165	168	163	172
166	160	168	165	170	163	164	166
170	162	172	160	168	166	166	168

a) Hãy lập bảng phân bố tần số tần suất ghép lớp với lớp đầu tiên là đoạn [158; 160] lớp tiếp theo là đoạn [161; 163] lớp cuối cùng là đoạn [170; 172] (độ dài mỗi đoạn là 2)

b) Hãy vẽ biểu đồ tần số hình cột

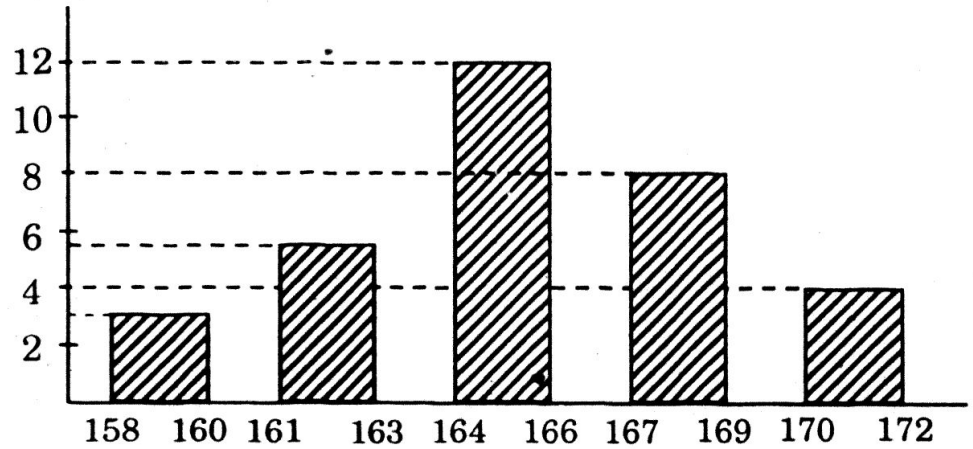
c) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình quạt

Giải

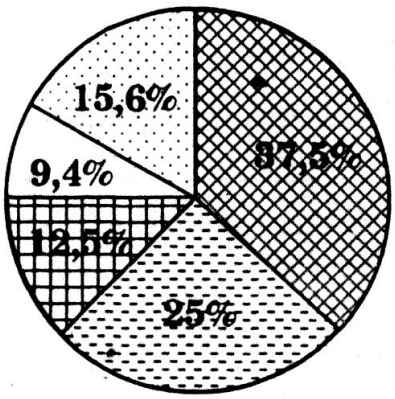
a) Lập bảng

Lớp	*Tần số*	*Tần suất (%)*
[158; 160]	3	9,4
[161; 163]	5	15,6
[164; 166]	12	37,5
[167; 169]	8	25
[170; 172]	4	12,5
	N = 32	

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột



c) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt



§3. ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

KIẾN THỨC CƠ BẢN

. ***Số trung bình***: $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

. ***Phương sai***: $S^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$; $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$

3. Độ lệch chuẩn S là căn bậc hai của phương sai

* Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng một bảng phân số tần số thì

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \; ; \; S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 \quad \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2$$

Trong đó n_i là tần số của số liệu x_i (i = 1, 2 ...m) $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$

* Nếu mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép lớp thì

$$\bar{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \; ; \; S^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2$$

Trong đó n_i là tần số của lớp thứ i; x_i là giá trị đại diện của lớp thứ i tức là trung điểm của đoạn (hay nửa khoảng) ứng với lớp thứ i (i = 1, 2, ... n)

4. Số trung vị: M_e

Sộ trung vị M_e của mẫu số liệu là số

- Đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ nếu N là một số lẻ
- Trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$ nếu N là một số chẵn.

5. Mốt: M_o: là giá trị có tần số lớn nhất.

II/ BÀI TẬP

Bài 5. Điểm kiểm tra môn toán của 30 học sinh lớp 10, kết quả được cho trong bảng sau:

Điểm	2	4	5	6	7	8	9	
Tần số	3	2	6	4	8	4	3	N = 30

a) Tính số trung bình

b) Tính số trung vị và mốt

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn

Giải

a) Số trung bình $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \frac{1}{30}(3.2 + 2.4 + 6.5 + 4.6 + 8.7 + 4.8 + 3.9)$

$= \frac{1}{30}.183 = 6,1$

b) N = 30 là số chẵn nên số trung vị M_e là số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$

Số liệu thứ $\frac{N}{2}$ là 6, số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}+1$ là 7

Vậy $M_e = \frac{6+7}{2} = 6,5$; $M_o = 7$

c) Phương sai $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2$

có $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 = \frac{1}{30}(3.4 + 2.16 + 6.25 + 4.36 + 8.49 + 4.64 + 3.81)$

$= \frac{1}{30}.1229 \approx 40,97$

và $\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 = (6,1)^2 = 37,21$

Vậy phương sai $S^2 \approx 40,97 - 37,21 \approx 3,76$

$\Rightarrow$ Độ lệch chuẩn $S \approx \sqrt{3,76} \approx 1,9$

Bài 6. Đo chiều cao của 35 cây gỗ quí ở rừng Cúc Phương ta được bảng số liệu sau:

Chiều cao (m)	8	9	10	11	12	13	
Tần số	3	5	9	8	6	4	N = 35

a) Tính số trung bình ; b) Tính số trung vị và mốt

c) Tính phương sai, độ lệch chuẩn

Giải

a) Số trung bình $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = \frac{1}{35}(3.8 + 5.9 + 9.10 + 8.11 + 6.12 + 4.13)$

$= \frac{1}{35}.371 = 10,6$

b) * Số trung vị: Vì N = 35 là số lẻ nên số trung vị là số đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ nên $M_e = 11$

* Mốt: $M_o = 10$

c) Phương sai $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2$

có $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 = \frac{1}{35}(3.64 + 5.81 + 9.100 + 8.121 + 6.144 + 4.169)$

$= \frac{1}{35}.4005 \approx 114,43$

và $\frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 = (10,6)^2 = 112,36$

Do đó $S^2 \approx 114,43 - 112,36 \approx 2,07 \Rightarrow$ Độ lệch chuẩn $S \approx \sqrt{2,07} \approx 1,44$

Bài 7. Một học sinh đi từ nhà đến trường thời gian đi (tính bằng phút) được ghi lại trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau đây.

Lớp	*Tần số*
[20; 24]	11
[25; 29]	13
[30; 34]	30
[35; 39]	19
[40; 44]	15
[45; 49]	12
	N = 100

a) Tính thời gian trung bình mà học sinh đó đi từ nhà đến trường

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Giải

a) Thời gian trung bình $\bar{x} = \sum_{i=1}^{6} n_i x_i = 34,5$ (phút)

b) Phương sai $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{6} n_i x_i\right)^2$

$$= \frac{124500}{100} - \frac{3450^2}{100^2} = 54,75$$

Do đó độ lệch chuẩn $S = \sqrt{54,75} \approx 7,4$

Bài 8. Số lượng vải bán ra tại một quầy hàng các tháng trong một năm được cho bởi bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	410	430	450	430	525	550	950	450	800	635	760	560

a) Tìm số vải trung bình bán trong một tháng

b) Tìm số trung vị và mốt

c) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn

Giải

a) Bảng phân phối tần số của mẫu số liệu trên là:

Số lượng	*Tần số*
410	1
430	2
450	2
525	1
550	1
560	1
635	1
760	1
800	1
950	1
	N = 12

Số trung bình $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i = 579,16$

b) * $M_e = \frac{525 + 550}{2} = 537,5$

* $M_0 = 430$ và $M_0 = 450$

c) Phương sai $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 \approx 27735,6$

Độ lệch chuẩn $S = \sqrt{27735,6} \approx 166,54$

Bài 9. Một cửa hàng bán muối Iốt thống kê số bao muối đã bán ra trong 29 ngày, kết quả như sau

43	47	61	36	50	62	54	43	31	65
67	45	43	67	53	45	21	36	50	43
54	62	36	58	59	45	50	43	61	

a) Tìm số trung bình, số trung vị

b) Tìm phương sai và độ lệch

Giải

a) Bảng phân phối tần số của mẫu số liệu trên là

Số lượng	*Tần số*
21	1
33	1
36	3
43	5
45	3

47	1
50	3
53	1
54	2
58	1
59	1
61	2
62	2
65	1
67	2
	N = 29

* Số trung bình $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \approx 49{,}38$

* Số trung vị $M_e = 50$

b) Phương sai $S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 \approx 112{,}58$

$\Rightarrow$ Độ lệch chuẩn $S \approx \sqrt{112{,}58} \approx 11{,}07$

Bài 10. Hai xạ thủ cùng thi bắn súng, số điểm đạt được sau mỗi lần bắ của từng người được ghi lại ở các bảng sau:

Bảng A Điểm số của xạ thủ thứ nhất

9	9	10	9	9	10	8	7	9	8
10	7	10	9	8	10	8	9	8	8
8	9	10	10	10	9	9	9	8	7

Bảng B Điểm số của xạ thủ thứ hai

7	9	10	10	9	7	9	8	9	7
9	10	10	7	10	9	7	10	9	8
8	9	9	8	7	9	10	9	10	9

a) Dấu hiệu ở đây là gì, mỗi xạ thủ bắn bao nhiêu phát

b) Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của các số liệ thống kê ở bảng A và B.

c) Em có nhận xét gì về kỹ năng bắn súng của từng xạ, thủ xét xem trong lần tập bắn này xạ thủ nào bắn chậm hơn.

Giải

a) Dấu hiệu là: Kĩ năng bắn súng của từng xạ thủ. Mỗi xạ thủ bắn 3 phát đạn.

b) Bảng phân phối tần số của mẫu số liệu của bảng A, B

Bảng A

Giá trị	*Tần số*
7	3
8	9
9	10
10	8
	N = 30

Bảng B

Giá trị	*Tần số*
7	6
8	9
9	8
10	7
	N = 30

ở bảng A

Số trung bình $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \approx 8,77$

Phương sai $S_A^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i x_i\right)^2 \approx 0,91$

$\Rightarrow$ Độ lệch chuẩn $S_A = \sqrt{0,91} \approx 0,965$

ở bảng B

- Số trung bình $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i \approx 8,5$

Phương sai $S_B^2 \approx 1,12$

Độ lệch chuẩn $S = \sqrt{1,1} \approx 1,06$

b) Xạ thủ thứ nhất có $\bar{x} \approx 8,8$ xạ thủ thứ hai có $\bar{x} \approx 8,5$. Vì vậy xạ thủ thứ nhất bắn chuẩn hơn xạ thủ thứ hai. Mặt khác $S_A^2 < S_B^2$ $(0,91 < 1,1)$ nghĩa là mức độ phân tán (so với trung bình) của xạ thủ thứ nhất nhỏ hơn nên trong lần tập bắn này xạ thủ thứ nhất bắn chậm hơn.

Chương VI.
GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

Radian

Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là cung có số đo 1 radian, gọi tắt là cung 1 radian. Góc ở tâm chắn cung 1 radian gọi là góc có số đo 1 radian, gọi tắt là góc 1 radian.

1 radian còn viết tắt là 1 rad

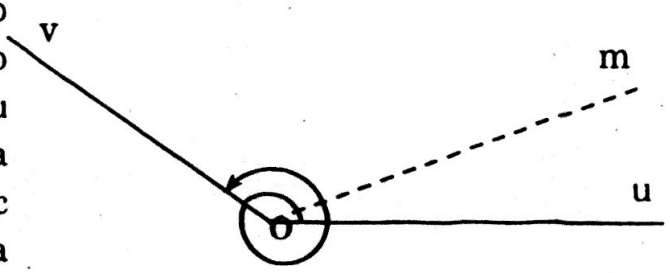
Quan hệ giữa số đo độ (a) và số đó radian (α) của một cung tròn

$$\boxed{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}}$$

Độ dài cung có số đo α rad: $l = R\alpha$

- Cho hai tia Ou, Ov

Nếu tia Om quay chỉ theo chiều dương (hay chỉ theo chiều âm) xuất phát từ tia Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói: Tia Om quét một góc lượng giác tia đầu Ou; tia cuối Ov.



- Hệ thức Sa–lơ: Với ba tia Ou, Ov, Ow

$$sđ(Ou, Ov) - sđ(Ov, Ow) = sđ(Ou; Ow) + k.2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Đổi số đo sau ra radian

120^0; -150^0; -720^0

15^0; 75^0; -225^0

Giải

$120^0 = \frac{2\pi}{3}$; $-150^0 = \frac{-5\pi}{6}$; $-720^0 = -4\pi$

$15^0 = \frac{\pi}{2}$; $75^0 = \frac{5\pi}{12}$; $-225^0 = -\frac{5\pi}{4}$

Bài 2. Đổi số đo sau ra độ

$\frac{\pi}{5}$; $\frac{-11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{5}$; $\frac{\pi}{8}$; $-\frac{3\pi}{10}$; $\frac{8\pi}{15}$

Giải

$\frac{\pi}{5} = 30^0$; $\frac{-11\pi}{6} = -330^0$; $\frac{13\pi}{5} = 468^0$; $\frac{\pi}{8} = 22^030'$;

$-\frac{3\pi}{10} = -54^0$; $\frac{8\pi}{15} = 96^0$

Bài 3. Tìm số đo a^0 của góc lượng giác (Ou, Ov) ($0 \le a < 360$), biết một góc lượng giác cùng tia đầu và tia cuối với góc đó với số đo.

-720^0; -450^0; -1450^0; 520^0

Đáp số: 0^0; 270^0; 6^0; 160^0

Bài 4. Tìm số đo α của góc lượng giác (Ou, Ov)

$0 \le \alpha < 2\pi$, biết một góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc đó với số đo là:

$\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{17\pi}{8}$; $\frac{25\pi}{4}$; $\frac{14\pi}{3}$

Đáp số: $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{15\pi}{8}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$

Bài 5. Tìm số đo của góc hình học uov, biết góc lượng giác giác (Ou, Ov) có số đo là:

- 225^0; 2006^0; 1950^0; -2250^0
- $-\frac{3\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{5}$; $-\frac{13\pi}{10}$; $\frac{10\pi}{7}$

Đáp số:

- 135^0; 154^0; 150^0; 85^0
- $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{10}$; $\frac{4\pi}{7}$

Bài 6. Kim giờ và kim phút chỉ thời gian lúc 12 giờ. Hỏi sau bao lâu hai kim trùng nhau.

Giải

Một giờ kim phút quét một góc lượng giác 2π; kim giờ quét một góc

lượng giác $-\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}$

Gọi x là thời gian để hai kim trùng nhau

Ta có phương trình: $-\frac{\pi}{6}x = -2\pi x + k2\pi;\ k \in \mathbb{Z},\ k > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{11\pi}{6}x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{12k}{11}$$

Lấy $k = 1$

Ta có: $x = \frac{12}{11}$ (giờ) $= 1^h5'27'',\ k \in \mathbb{Z},\ k > 0$

Bài 7. Kim giờ và kim phút đang chỉ 12 giờ. Hỏi sau bao lâu hai kim sẽ thẳng hàng.

Giải

Tương tự, trên ta có phương trình

$$-\frac{\pi}{6}x = -2\pi x + (2k + 1)\pi;\ k \in \mathbb{Z},\ k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6}{11}(2k + 1);\ k \in \mathbb{Z}\ (k \geq 0)$$

Lấy $k = 0$, ta có $x = \frac{6}{11} \approx 32'43''$

§4. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Đường tròn lượng giác là đường tròn đơn vị (bán kính bằng 1), định hướng, trên đó có một điểm A gọi là điểm gốc.
  - $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$

    $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$

    $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

    $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$

    $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$

    $\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$
  - $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy; trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các góc có số đo.

a) 225^0;

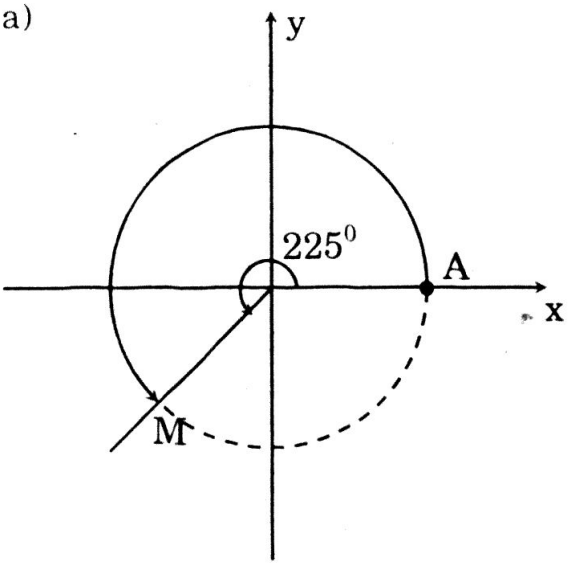
b) $-\frac{2\pi}{3}$;

c) $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$

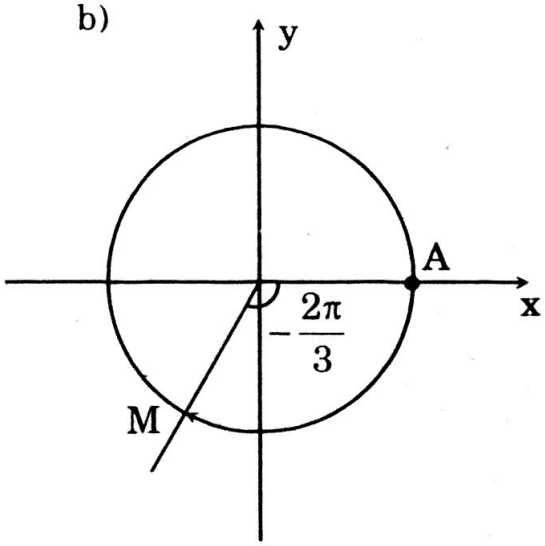
d) $\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$

Giải

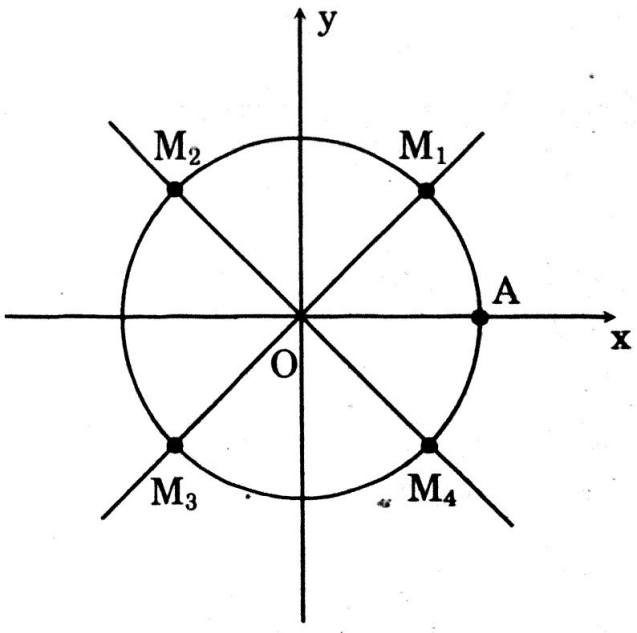
a)



b)



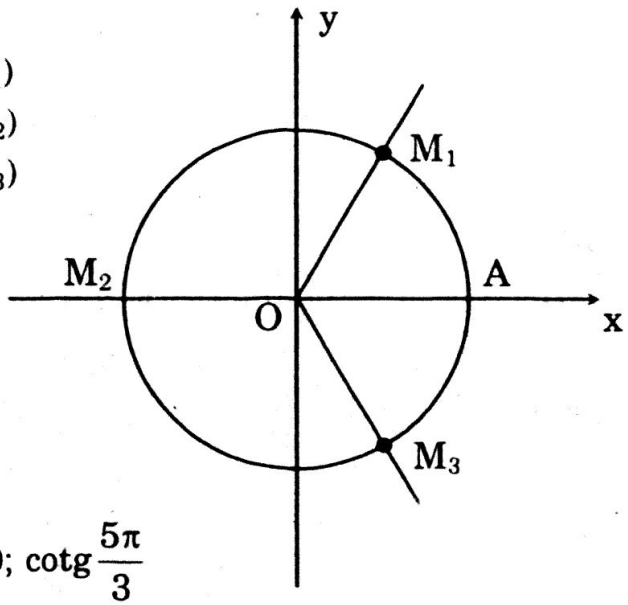
c) k = 0; 4; 8; ... là (OA; OM_1)
k = 1; 5; 9; ... là (OA; OM_2)
k = 2; 6; 10; ... là (OA; OM_3);
k = 3; 7; 11; ... là (OA; OM_4)



d) Với k = 0; 3; 6; ... là (OA; OM_1)

Với k = 1; 4; 7; ... là (OA; OM_2)

Với k = 2; 5; 8; ... là (OA; OM_3)



Bài 2. Xác định dấu của các số sau

a) $\sin 110^0$; $\cos(-120^0)$; $\tan(-145^0)$; $\cot g\frac{5\pi}{3}$

b) $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$; $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$; $\tan(\alpha - \frac{\pi}{2})$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

c) $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\tan\alpha$; $\cot\alpha$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Giải

a) Vì $90^0 < 110^0 < 100^0 \Rightarrow \sin 110^0 > 0$

$-90^0 > -120^0 > -180^0 \Rightarrow \cos(-120^0) < 0$

Tương tự $\tan(-145^0) > 0$; $\cot\frac{5\pi}{3} < 0$

b) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) > 0$; $\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) < 0$.

• $0 < \alpha < \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\pi}{2} < 0 \Rightarrow \tan(\alpha - \frac{\pi}{2}) < 0$

c) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin\alpha > 0$; $\cos\alpha < 0$; $\tan\alpha < 0$; $\cot\alpha < 0$

Bài 3. a) Tính $\cos\alpha$; $\tan\alpha$; $\cot\alpha$; biết $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b) Tính $\cot\alpha$; $\cos\alpha$; $\sin\alpha$, biết $\tan\alpha = -\frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Giải

a) Ta có $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ (vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)

$\Rightarrow \cos\alpha = -1\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}$; $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{4}{3}$

b) $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{5}{3}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

(vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$) $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

Bài 4. Chứng minh các đẳng thức

a) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$

b) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \tan\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

c) $\sin^3\alpha(1+\cot\alpha) + \cos^3\alpha(1+\tan\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$

d) $\sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha = 1$

Giải

a) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}$

$= \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$ (đpcm)

b) Ta có: $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \tan\alpha = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}$

$= \frac{1+\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}$ (đpcm)

c) Ta có: $\sin^3\alpha(1+\cot\alpha) + \cos^3\alpha(1+\tan\alpha)$

$= \sin^3\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \cos^3\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$= \sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha) + \cos^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$= (\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = \sin\alpha+\cos\alpha$ (đpcm)

d) Ta có: $\sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha$

$= \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (đpcm)

e) $E = \sin\alpha\cos\alpha\,(\tan\alpha + \cos\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha.\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \sin\alpha\cos\alpha.\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Bài 5. Đơn giản biểu thức

a) $A = \sin^2\alpha + \tan^2\alpha + \cos^2\alpha$ b) $B = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$

c) $C = \tan^2\alpha\cos^2\alpha + \cot^2\alpha.\sin^2\alpha$ *d) $D = \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

e) $E = \sin\alpha.\cos\alpha(\tan\alpha + \cot\alpha)$

Giải

a) $A = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \tan^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

b) $B = \sin^4\alpha + \cos^2\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \sin^4\alpha + \cos^2\alpha.\sin^2\alpha$

$= \sin^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha$

c) $C = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}.\cos^2\alpha + \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.\sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

d) $D = \cos^2x(\sin^2x + \cos^2x) + \sin^2x = \cos^2x + \sin^2x = 1$

Bài 6. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào x

a) $A = 3(\sin^4x + \cos^4x) - 2(\sin^6x + \cos^6x)$

b) $B = \sin^6x + \cos^6x + 3\sin^2x\cos^2x$

c) $C = \cos^2x.\cot^2x + 2\cos^2x - \cot^2x + \sin^2x$

Giải

a) Vì $\sin^2x + \cos^2x = 1$, đặt $u = \sin^2x \Rightarrow \cos^2x = 1 - u$. Ta có

$A = 3[u^2 + (1 - u)^2] - 2[u^3 + (1 - u)^3]$

$= 3u^2 + 3 - 6u + 3u^2 - 2u^3 - 2 + 6u - 6u^2 + 2u^3 = 1$

b) Đặt $u = \sin^2x \Rightarrow \cos^2x = 1 - u$ Ta có

$B = u^3 + (1 - u)^3 + 3u(1 - u) = u^3 + 1 - 3u + 3u^2 - u^3 + 3u - 3u^2 = 1$

c) $C = \dfrac{\cos^4x}{\sin^2x} + 2\cos^2x - \dfrac{\cos^2x}{\sin^2x} + \sin^2x$

$= \dfrac{1}{\sin^2x}(\cos^4x + 2\cos^2x.\sin^2x - \cos^2x + \sin^4x)$

Đặt $u = \sin^2x \Rightarrow \cos^2x = 1 - u$

$C = \dfrac{1}{u}[(1 - u)^2 + 2u(1 - u) - 1 + u + u^2]$

$= \dfrac{1}{u}(1 - 2u + u^2 + 2u - 2u^2 - 1 + u + u^2) = 1$

Bài 7. a) Cho tanx = 2. Tính $A = \dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin^3\alpha - \cos^3\alpha}$

b) Cho tanx = 3. Tính $B = \dfrac{\sin^2 x + \sin x\cos x + 2}{3\sin x\cos x + \cos^2 x - 4}$

Giải

a) Vì $\tan x = 2 \Rightarrow \cos x \neq 0$

Chia tử và mẫu của biểu thức A cho $\cos^3 x \neq 0$ ta được:

$$A = \frac{\tan^3 x + 1}{\tan^3 x - 1} = \frac{2^3 + 1}{2^3 - 1} = \frac{9}{7}$$

b) Ta có: $B = \dfrac{\sin^2 x + \sin x\cos x + 2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x\cos x + \cos^2 x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x)}$

$$= \frac{3\sin^2 x + \sin x\cos x + 2\cos^2 x}{3\sin x\cos x + 4\sin^2 x - 3\cos^2 x} = \frac{3\tan^2 x + \tan x + 2}{3\tan x - 4\tan^2 x - 3}$$

$$= \frac{3.3^2 + 3 + 2}{3.3 - 4.3^2 - 3} = -\frac{16}{15}$$

Bài 8. a) Cho $5\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{6}$ (*). Tính. $A = \sin^4 x + 5\cos^4 x$

b) Cho $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{5}$. Tính $\sin x\cos x$; $\tan x + \cot x$; $\sin^3 x + \cos^3 x$

c) Cho $\tan x - \cot x = m$. Tính. $\tan^2 x + \cot^2 x$; $\tan^3 x - \cot^3 x$

Giải

a) Đặt $u = \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = 1 - u$. Thế vào (*)

ta được: $5u^2 + (1 - 4)^2 = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow 36u^2 - 12u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{6}$

Vậy $\cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6} \Rightarrow A = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 + 5\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{126}{36} = \dfrac{7}{2}$

b) Ta có $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \dfrac{1}{25}$

$\Rightarrow 2\sin x.\cos x = \dfrac{1}{25} - 1 = -\dfrac{24}{25} \Rightarrow \sin x\cos x = -\dfrac{12}{25}$

Ta có: $\tan x + \cot x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\sin x\cos x} = -\dfrac{25}{12}$

$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x)$

$$= \frac{1}{5}\left[1 + \frac{12}{25}\right) = \frac{37}{125}$$

c) Ta có: $\tan x - \cot x = m$

$\Rightarrow \tan^2 x - 2\tan x.\cot x + \cot^2 x = m^2$

$\Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = m^2 + 2$

$\tan^3 x - \cot^3 x - (\tan x - \cot x)(\tan^2 x + \tan x.\cot x + \cot^2 x)$

$= m(m^2 + 3) = m^3 + 3m$

Bài 9. Chứng minh rằng

a) $|\sin x \cos x| \le \frac{1}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ b) $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi, cho hai số: $\sin^2 x \ge 0$; $\cos^2 x \ge 0$

Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x \ge 2\sqrt{\sin^2 x \cos^2 x} = 2|\sin x \cos x|$

$\Rightarrow 1 \ge 2|\sin x \cos x| \Rightarrow |\sin x \cos x| \le \frac{1}{2}$

b) Theo bài đẳng thức Bu–nhi–a–cốp–xki, ta có

$|\sin x + \cos x| = |1.\sin x + 1.\cos x| \le \sqrt{1^2 + 1^2}.\sqrt{\sin^2 x \cos^2 x}$

$= \sqrt{2} \Rightarrow |\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$

Cách khác: Đặt $m = \sin x + \cos x \Rightarrow \cos x = m - \sin x$. Vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + (m - \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow$

$2\sin^2 x - 2m\sin x + m^2 - 1 = 0$. Đặt $y = \sin x$. Phương trình có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' \ge 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2 \ge 0$ $|m| \le \sqrt{2}$ hay $|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}$

Bài 10. a) Chứng minh $\forall x \ne k.\frac{\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$, ta có: $|\tan x + \cot x| \ge 2$

b) Chứng minh rằng $4\sin^2 x - 6\sin x + \frac{9}{4} \ge 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Giải

a) *Cách 1.* Vì $\cos x = \frac{1}{\tan x}$, nên $\tan x > 0 \Rightarrow \cot x > 0$

- Nếu $\tan x > 0$, theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$\tan x + \cot x \ge 2\sqrt{\tan x.\cot x} = 2$ (*)

- Nếu $\tan x < 0 \Rightarrow \cot x < 0$

Đặt $t = -\tan x \Rightarrow t > 0$

Vậy $t + \frac{1}{t} \ge 2$ hay $-\tan x - \cos x \ge 2 \Rightarrow \tan x + \cot x \le -2$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow |\tan x + \cot x| \ge 2$

Cách 2. Chứng minh rằng: $|\text{tg}x + \cos gx| \ge 2$ (*)

$(*) \Leftrightarrow \left|tgx + \frac{1}{tgx}\right| \geq 2$

Vì tgx và $\frac{1}{tgx}$ luôn cùng dấu nên: $\left|tgx + \frac{1}{tgx}\right| = |tgx| + \left|\frac{1}{tgx}\right|$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $|tgx|$; $\left|\frac{1}{tgx}\right|$

Ta có: $|tgx| + \left|\frac{1}{tgx}\right| \geq 2\sqrt{\left|tgx.\frac{1}{tgx}\right|} = 2$

Vậy: $\left|tgx + \frac{1}{tgx}\right| \geq 2$ (đpcm)

b) Chứng minh rằng: $4\sin^2x - 6\sin x + \frac{9}{4} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Cách 1: Ta có: $4\sin^2x - 6\sin x + \frac{9}{4} = \left(2\sin x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (đpcm)

Cách 2: Đặt $u = \sin x$, vì $\sin^2x + \cos^2x = 1 \Rightarrow \sin^2x \leq 1 \Rightarrow |\sin x| \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq u \leq 1$

Ta có bất đẳng thức: $4u^2 - 6u + \frac{9}{4} \geq 0$ (với $u \in [-1; 1]$

Xét hàm số $f(x) = 4u^2 - 6u + \frac{9}{4}, \forall u \in [-1; 1]$

Tọa độ đỉnh của parabol: $S\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ và $a = 4 > 0$

Ta có bảng biến thiên

u	-1		$\frac{3}{4}$		1
f(u)	▨	↘	0	↗	▨

Vậy $f(u) \geq 0 \ \forall u \in [-1; 1]$

Bài 11. Tam giác ABC có: $\frac{\cos^2A + \cos^2B}{\sin^2A + \sin^2B} = \frac{1}{2}(\cot^2A + \cot^2B)$ (*)

Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại C.

Giải

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{1 - \sin^2A + 1 - \sin^2B}{\sin^2A + \sin^2B} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2A} - 1 + \frac{1}{\sin^2B} - 1\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 A \sin^2 B = (\sin^2 A + \sin^2 B)^2.$$

$\Leftrightarrow (\sin^2 A - \sin^2 B)^2 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \sin A = \sin B$

$\Leftrightarrow A = B$ (vì $0 < A < \pi$; $0 < B < \pi$) $\Rightarrow \sin A \geq \sin B > 0$

§3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai góc đối nhau: α và $-\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

2. Hai góc bù nhau: α và $\pi - \alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

3. Hai góc hơn kém nhau π: α và $\alpha + \pi$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

4. Hai góc phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \ ; \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha \ ; \ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$$

II/ BÀI TẬP

Bài 1. Đơn giản biểu thức

a) $A = \sin(\pi + x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot(2\pi - x) + \tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

b) $B = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \tan\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \tan\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$

Giải

a) $A = -\sin x - \sin x + \cot(-x) + \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

$= -2\sin x - \cot x + \cot x = -2\sin x$

b) $B = \cot x + \tan(x + \frac{3\pi}{2} - \pi) + \tan(x + \frac{\pi}{2} - \pi) + \tan(x + \frac{5\pi}{2} - 3\pi)$

$= \cot x - \tan(\frac{\pi}{2} - x) - \tan(\frac{\pi}{2} - x) - \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

$= \cot x - 3\cot x = -2\cot x$

ài 2. Không sử dụng máy tính và bảng số tính

a) $A = \tan1^0.\tan2^0.\tan3^0 \ldots \tan88^0.\tan89^0$

b) $B = \cos20^0 + \cos40^0 + \cos60^0 + \ldots + \cos160^0 + \cos180^0$.

c) $C = \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 170^0 + \sin^2 180^0$.

Giải

a) $A = \tan1^0.\tan2^0 \ldots \tan44^0\tan45^0.\cot44^0.\cot43^0 \ldots \cot2^0.\cot1^0$.

$= (\tan1^0.\cot1^0).(\tan2^0.\cot2^0) \ldots (\tan44^0.\cot44^0)\tan45^0 = 1$

b) $B = \cos20^0 + \cos40^0 + \ldots + \cos80^0 - \cos80^0 - \cos60^0 - \ldots - \cos20^0 + (-1) = -1$

c) $C = \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 80^0 + \sin^2 100^0 + \ldots + \sin^2 170^0$.

$= \sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 80^0 + \sin^2 80^0 + \ldots + \sin^2 180^0$

$= 2(\sin^2 10^0 + \sin^2 20^0 + \ldots + \sin^2 70^0 + \sin 80^0)$

$= 2[(\sin^2 10^0 + \cos^2 10^0) + (\sin^2 20^0 + \cos^2 20^0) + (\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0) + (\sin^2 40^0 + \sin^2 40^0)] = 2.4 = 8$

ài 3. Chứng ming rằng

a) $\dfrac{\cos^2(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\tan^2(\alpha - 2\pi)} + \dfrac{\cos^2(-\alpha)}{\tan^2(\alpha - \frac{3\pi}{2})} = 1$

b) $\dfrac{\sin(\pi + \alpha)}{\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha)} \cdot \dfrac{\tan(\alpha - \pi)}{\cot(\pi + \alpha)} \cdot \dfrac{\cos(2\pi - \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)} = \sin\alpha$

c) $\dfrac{1 - \cot^2(\alpha - \frac{3\pi}{2})}{\cot(\alpha + \frac{\pi}{2})} \cdot \dfrac{\tan(\alpha - \frac{\pi}{2})}{1 - \cot^2(\alpha - 2\pi)} = -1$

d) $\dfrac{\sin(\pi - \alpha).\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha).\cos(2\pi - \alpha)}{\tan(\pi + \alpha).\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha).\sin(-\alpha)} = \sin\alpha$

Giải

a) Biến đổi vế trái (VT) ta có: $VT = \dfrac{\cos^2(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}{\tan^2\alpha} + \dfrac{\cos^2\alpha}{\tan^2(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$

$$= \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\tan^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha} = \frac{\sin^2 a}{\tan^2 a} + \frac{\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

b) Biến đổi vế trái, ta có

$$\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}.\frac{\tan\alpha}{\cot\alpha}.\frac{\cos\alpha}{\left[-\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\right]} = \cos\alpha.\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sin\alpha$$

c) Biến đổi vế trái, ta có

$$VT = \frac{1 - \cot^2(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{\cot(\alpha + \frac{\pi}{2} - \pi)}.\frac{-\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{1 - \cot^2\alpha} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{(-\tan\alpha)}.\frac{-\cot\alpha}{1 - \cot^2\alpha}$$

$$= \frac{1 - \tan^2\alpha}{-\tan\alpha}.\frac{\cot\alpha}{1 - \dfrac{1}{\tan^2\alpha}} = -\frac{\tan^2\alpha.\cot\alpha}{\tan\alpha} = -1$$

d) Biến đổi vế trái, ta có

$$VT = -\frac{\sin\alpha.\tan\alpha.\cos\alpha}{-\tan\alpha.\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha - \pi).\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{-\tan(\alpha - \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos\alpha}{\cot\alpha} = \sin\alpha$$

Bài 4. Rút gọn biểu thức

a) $A = \cos(270^0 - x) - 2\sin(x - 450^0) + \cos(x + 900^0) + 2\sin(720^0 - x) + \cos(540^0 - x)$.

b) $B = 2\sin(810^0 + x) + \cos(x - 1260^0) + \tan(630^0 + x).\tan(1260^0 - x)$.

Giải

a) $A = \cos(90^0 - x + 180^0) - 2\sin(x - 90^0 - 360^0) + \cos(x + 180^0 + 2.360^0) + 2\sin(2.360^0 - x) + \cos(180^0 - x + 360^0)$

$= -\cos(90^0 - x) + 2\sin(90^0 - x) + \cos(x + 180^0) + 2\sin(-x) + \cos(180^0 - x)$

$= -\sin x + 2\cos x - \cos x - 2\sin x - \cos x = -3\sin x$

b) $B = 2\sin(90^0 + x) + \cos(x - 180^0) + \tan(-90^0 + x).\tan(180^0 - x)$

$= 2\sin(180^0 - 90^0 - x) + \cos(180^0 - x) - \tan(90^0 - x).\tan(-x)$

$= 2\cos x - \cos x + \cot x.\tan x = 1 + \cos x$

ài 5. Rút gọn

a) $A = \sin 20^0 + \sin 40^0 + ... + \sin 340^0 + \sin 360^0$

b) $B = \cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}$

Giải

a) $A = (\sin 20^0 + \sin 200^0) + (\sin 40^0 + \sin 220^0) + ...$

$... + (\sin 160^0 + \sin 340^0) + (\sin 180^0 + \sin 360^0)$

$= (\sin 20^0 - \sin 20^0) + (\sin 40^0 - \sin 40^0) + ... + (\sin 160^0 - \sin 160^0) + 0$

$= 0$

b) $B = (\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{11\pi}{12}) + (\cos^2\frac{3\pi}{12} + \cos^2\frac{9\pi}{12}) + (\cos^2\frac{5\pi}{12} + \cos^2\frac{7\pi}{12})$

$= 2(\cos^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{5\pi}{12}) + 2\cos^2\frac{\pi}{4}$

$= 2(\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12}) + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + 1 = 3$

ài 6. Chứng minh rằng trong ΔABC, ta có

a) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$; b) $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B+C}{2} = 1$; c) $\sin(B + C) = \sin A$

Giải

a) Ta có $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{A+B}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}.$

b) Ta có: $A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

$\Rightarrow \tan\frac{B+C}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$

Vậy $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B+C}{2} = \tan\frac{A}{2}.\cot\frac{A}{2} = 1$

c) Ta có $A + B + C = \pi \Rightarrow B + C = \pi - A$

$\Rightarrow \sin(B + C) = \sin(\pi - A) = \sin A$

ài 7. Rút gọn biểu thức với A, B, C là ba góc của ΔABC

a) $M = \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B+C}{2} + \sin^2\frac{A+B+C}{2}$

b) $P = \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{A+C}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{A+C}{2}$

Giải

a) $M = \sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$

b) $P = \cos^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\cot\frac{B}{2} = 1 + 1 = 2$

§4. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I/ KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Công thức cộng

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

2. Công thức nhân

$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\tan2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

Công thức hạ bậc

$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos2\alpha}{2}$; $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos2\alpha}{2}$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$

$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích

$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2}\cos\dfrac{x - y}{2}$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

BÀI TẬP

Bài 1. Không dùng máy tính bỏ túi và bảng số. Tính

a) $\sin 75^0$; $\cos 75^0$; $\tan 75^0$ b) $\sin 15^0$; $\cos 15^0$; $\tan 15^0$

c) $\sin\frac{7\pi}{12}$; $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\tan\frac{7\pi}{12}$

Giải

a) $\sin 75^0 = \sin(30^0 + 45^0) = \sin 30^0\cos 45^0 + \sin 45^0\cos 30^0$.

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

Ta có: $\cos 75^0 = \cos(30^0 + 45^0) = \cos 30^0\cos 45^0 - \cos 30^0\sin 45^0$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\tan 75^0 = \frac{\sin 75^0}{\cos 75^0} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

b) $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0\cos 30^0 - \cos 45^0\sin 30^0$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

$$\cos 15^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3}); \quad \tan 15^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

c) $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$$

$$\tan\frac{7\pi}{12} = \frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\cos\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

Bài 2.

a) Tính $\sin(\alpha + \beta)$, biết $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = -\frac{5}{13}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

b) Tính $\cos(\alpha + \beta)$; biết $\tan\alpha = -\frac{24}{7}$; $\tan\beta = \frac{15}{8}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

Giải

a) Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$;

$\sin\beta = -\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = -\frac{12}{13}$. Ta có: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$

$\left(\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{33}{65}$

b) Theo công thức $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$ (vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$)

$= \frac{-1}{\sqrt{1+\left(-\frac{24}{7}\right)^2}} = -\frac{7}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$

Tương tự: $\cos\beta = -\frac{8}{17}$; $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$

Ta có: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(-\frac{7}{25}\right).\left(-\frac{8}{17}\right) - \left(\frac{24}{25}\right)\left(-\frac{15}{17}\right) = \frac{416}{425}$

Bài 3.

a) Tính $\tan(\alpha + \beta)$; biết $\tan\alpha = \frac{1}{5}$; $\tan\beta = \frac{2}{3}$

b) Tính $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$; biết $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ $(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$

Giải

a) Tính $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = 1$

b) Ta có: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$; vì $(\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi) \Rightarrow$

$$\tan\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = -\frac{\dfrac{12}{13}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}} = -\frac{12}{5}$$

Ta có: $\tan(\dfrac{\pi}{4} + \alpha) = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\dfrac{\pi}{4}\tan\alpha} = \dfrac{1 - \dfrac{12}{5}}{1 - 1\dfrac{12}{5}} = -\dfrac{7}{17}$

Bài 4. Đơn giản biểu thức

a) $\sin\alpha\cos2\alpha + \cos\alpha\sin2\alpha$

b) $\dfrac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x\tan^2 x}$

c) $\dfrac{\tan(\dfrac{\pi}{4} + x) - \tan x}{1 + \tan(\dfrac{\pi}{4} + x).\tan x}$

Giải

a) $\sin\alpha\cos2\alpha + \cos\alpha\sin2x = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin3\alpha$

b) $\dfrac{\tan^2 2x - \tan^2 x}{1 - \tan^2 2x\tan^2 x} = \dfrac{\tan2x - \tan x}{1 + \tan2x\tan x}.\dfrac{\tan2x - \tan x}{1 - \tan2x\tan x} =$

$= \tan(2x - x).\tan(2x + x) = \tan x.\tan3x$

c) $\dfrac{\tan(\dfrac{\pi}{4} + x) - \tan x}{1 + \tan(\dfrac{\pi}{4} + x).\tan x} = \tan(\dfrac{\pi}{4} + x - x) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức

a) $\dfrac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{1 - \tan^2\alpha.\tan^2\beta} = \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha - \beta)$

b) $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha + \beta)} + \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha - \beta)} = 2$

c) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \tan(\dfrac{\pi}{4} + \alpha)$

d) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} + \dfrac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha} = 0$

Giải

a) Ta có $\dfrac{\tan^2\alpha - \tan^2\beta}{1 - \tan^2\alpha.\tan^2\beta} = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} \cdot \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$

$= \tan(\alpha + \beta)\tan(\alpha + \beta)$

b) Ta có: $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan(\alpha + \beta)} + \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\tan(\alpha - \beta)}$

$= \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}} + \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}}$

$= 1 - \tan\alpha\tan\beta + 1 + \tan\alpha\tan\beta = 2$

c) Ta có: $\tan(\dfrac{\pi}{4} + \alpha) = \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4} + \tan\alpha}{1 - \tan\dfrac{\pi}{4}\tan\alpha} = \dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$

$= \dfrac{1 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$

d) Ta có: $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \cos\beta - \cos\alpha$ (1)

Tương tự $\dfrac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = \cos\gamma - \cos\beta$ (2)

$\dfrac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin\gamma\sin\alpha} = \cos\alpha - \cos\gamma$ (3)

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta có đpcm.

Bài 6. Chứng minh câu đẳng thức

a) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

b) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

c) $\dfrac{\tan(\alpha - \beta) + \tan\beta}{\tan(\alpha + \beta) - \tan\beta} = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$

Giải

a) Ta có $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \sin^2\alpha.\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - (1 - \sin^2\alpha)\sin^2\beta$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\beta + \sin^2\alpha.\sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$

b) $\cos(\alpha + \beta).\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$= \cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta = \cos^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - (1 - \cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

c) $$\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{\tan(\alpha+\beta)-\tan\beta}=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}+\tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}-\tan\beta}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha.\tan^2\beta}{1+\tan\alpha-\tan\beta}\cdot\frac{1-\tan\alpha.\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\alpha\tan^2\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

Bài 7. a) Cho $a-b=\frac{\pi}{3}$. Tính $(\cos a+\cos b)^2+(\sin a+\sin b)^2$

b) Cho $\cos a=\frac{1}{3}$; $\cos b=\frac{1}{4}$. Tính $\cos(a+b)\cos(a-b)$.

c) Nếu $\sin(2a+b)=3\sin b\cos a\neq 0$; $\cos(a+b)\neq 0$ thì

$\tan(a+b)=2\tan a$

Giải

a) Ta có: $(\cos a+\cos b)^2+(\sin a+\sin b)^2$

$=\cos^2a+2\cos a\cos b+\cos^2b+\sin^2a+2\sin a\sin b+\sin^2b$

$=2+2(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=2+2\cos(a-b)=2+2\cos\frac{\pi}{3}$

$=2+2.\frac{1}{2}=2+1=3$

b) Ta có:

$\cos(a+b).\cos(a=b)=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)(\cos a\cos b+\sin a\sin b)$

$=\cos^2a\cos^2b-\sin^2a\sin^2b=\cos^2a\cos^2b-(1-\cos^2a)(1-\cos^2b)$

$=\cos^2a\cos^2b-1+\cos^2a+\cos^2b-\cos^2a\cos^2b$

$=-1+\cos^2a+\cos^2b=-1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=-\frac{119}{144}$

c) Ta có: $\sin(2a+b)=3\sin b$

$\Rightarrow \sin[(a+b)+a]=3\sin[(a+b)-a]$

$\Rightarrow \sin(a+b)\cos a+\cos(a+b)\sin a=3(\sin(a+b)\cos a-\cos(a+b)\sin a)$

$\Rightarrow 2\cos a\sin(a+b)=4\sin a.\cos(a+b)$

$\Rightarrow 2\tan a=\tan(a+b)$

Bài 8. Chứng minh rằng trong tam giác ΔABC, ta có

a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$ (ΔABC không vuông)

b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

Giải

a) Ta có: $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C$

$\Rightarrow \tan(A + B) = \tan(\pi - C)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A.\tan B} = -\tan C \Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C(1 - \tan A\tan B)$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$ (đpcm)

b) Ta có $\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2} \Rightarrow \tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \cos\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} = \left(1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Bài 9. Chứng minh bất đẳng thức

a) $|\sqrt{3}\sin x + \cos x| \le 2$ (1) ; b) $|\sin 2x - \cos 2x| \le \sqrt{2}$ (2)

c) $|3\sin x - 4\cos x| \le 5$ (3)

Giải

a) Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right| \le 1$$

$\Leftrightarrow |\sin(x + \dfrac{\pi}{6})| \le 1$ Bất đẳng thức này luôn đúng

b) Ta có: $(2) \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\cos\dfrac{\pi}{4}\sin 2x - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos 2x\right| \le 1$

$\Leftrightarrow |\sin(2x - \dfrac{\pi}{4})| \le 1$ Bất đẳng thức này luôn đúng

c) Ta có $(3) \Leftrightarrow \left|\dfrac{3}{5}\sin x - \dfrac{4}{5}\cos x\right| \le 1$

Vì $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = 1$. Nên ta đặt $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$

Ta có: $|\cos\alpha\sin x - \sin\alpha\cos x| \le 1$

$\Leftrightarrow |\sin(x - \alpha)| \leq 1$ Bất đẳng thức này luôn đúng

(Bạn đọc có thể giải các bài toán này theo cách đã trình bày ở bài 9; §2, chương IV)

Bài 10. Chứng minh các đẳng thức

a) $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\sin 2x}$; b) $\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$

c) $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \dfrac{1}{4}\sin 4x$; d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{4}(3 + \cos 4x)$

Giải

a) Ta có: $\tan x + \cot x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \dfrac{2}{2\sin x \cos x}$

$= \dfrac{2}{\sin 2x}$

b) Ta có: $\dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{2\sin^2 x}{2\sin x \cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

c) Ta có: $\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$= \dfrac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x = \dfrac{1}{4}\sin 4x$

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \left(\dfrac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos^2 2x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1 + \cos 4x}{2}\right] = \dfrac{1}{4}(3 + \cos 4x)$

Bài 11. Chứng minh rằng

a) $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; b) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

c) $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

Giải

a) Ta có: $\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin x \sin x$

$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x \cos x$

$= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$= 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

b) Ta có: $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$= 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x$

c) Ta có: $\tan 3x = \tan(2x + x) = \dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \tan x}$

$$= \frac{\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}} = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

Bài 12. Chứng minh các đẳng thức sau

Đặt t = tanx. Ta có $\sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Giải

Ta có: $\sin 2x = 2\sin x\cos x = \frac{2\sin x\cos x}{1} = \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$

Chia cả tử và mẫu thức cho $\cos^2 x$, ta được:

$$\sin 2x = \frac{2\tan x}{\tan^2 x + 1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Tương tự: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

(Ta cũng có: $\tan 2x = \frac{2t}{1-t^2}$)

Bài 13. Tính giá trị của biểu thức sau (không dùng máy tính và bảng số)

a) $A = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

b) $B = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$; c) $C = \sin 6^0 \sin 42^0 \sin 66^0 \sin 78^0$.

Giải

a) Ta có: $A = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}.2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{4\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= \frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sin(\frac{\pi}{7}+\pi)}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}$$

b) $B = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}2\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}\left[-\cos\frac{2\pi}{7}\right] \quad (\text{vì } \cos\frac{5\pi}{7} = -\cos(\pi - \frac{5\pi}{7}))$$

$$= \frac{-1}{4\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{-1}{8\sin\frac{\pi}{7}}\sin\frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$$

c) $C = \frac{1}{2\cos 6^0}.2\sin 6^0\cos 6^0\cos 42^0\sin 66^0\sin 78^0.$

$$= \frac{1}{2\cos 6^0}\sin 12^0.\sin 42^0\sin 66^0.\cos 12^0 \quad (\cos 12^0 = \sin 78)$$

$$= \frac{1}{4\cos 6^0}.\sin 24^0\sin 42^0.\cos 24^0$$

$$= \frac{1}{8\cos 6^0}.\sin 48^0\sin 42^0 = \frac{1}{16\cos 6^0}\sin 42^0.\cos 42^0$$

$$= \frac{1}{32\cos 6^0}.\sin 84^0 = \frac{\cos 6^0}{32\cos 6^0} = \frac{1}{32}$$

Bài 14. Cho $\frac{1+\cos a}{\sin a} = 2$ (*) Tính $\tan\frac{a}{2}$; $\cos 2a$

Giải

a) Đặt $t = \tan\frac{a}{2}$. Ta có: $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$

(xem bài toán 13 ở trên)

$$(*) \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + \frac{1+t^2}{2t} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

b) Ta có: $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5}$

Lại có $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2.\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$

Bài 15. Chứng minh các đẳng thức

a) $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \tan\alpha$; b) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = 2$

c) $\frac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha} = \cos\alpha$; d) $\frac{1+\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}.\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \cot\alpha$

Giải

a) Ta có: $\dfrac{1-\cos2\alpha+\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha+\sin2\alpha}=\dfrac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}=\tan\alpha$

b) Ta có: $\dfrac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos3\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin3\alpha\cos\alpha-\cos3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\dfrac{1}{2}\sin2\alpha}=2$

c) $\dfrac{\sin^3\alpha+\sin3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos3\alpha}=\dfrac{\sin^3\alpha+3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}$

$=\dfrac{\sin\alpha.\cos^2\alpha}{\cos\alpha.\sin^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$

d) Ta có:

$\dfrac{1+\cos2\alpha}{\cos2\alpha}.\dfrac{1+\cos4\alpha}{\sin4\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha.2\cos^2 2\alpha}{\cos2\alpha.2\sin2\alpha.\cos2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\cot\alpha$

Bài 16. Rút gọn các biểu thức

a) $A=\dfrac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}$; b) $B=\dfrac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}.\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

c) $C=\dfrac{\cos\alpha-\cos2\alpha-1}{\sin\alpha-\sin2\alpha}$; d) $D=\dfrac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\sin2\alpha+2\sin\alpha\cos2\alpha}$

Giải

a) $A=\dfrac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\dfrac{(1-\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)}$

$=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$

b) $B=\dfrac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}.\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$

c) $C=\dfrac{\cos\alpha-(1+\cos2\alpha)}{\sin\alpha-\sin2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha(1-2\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-2\cos\alpha)}$

$=\cot\alpha$

d) $D=\dfrac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\sin2\alpha+2\sin\alpha\cos2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha+\cos\alpha+4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}{2\sin\alpha(\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1)}$

$=\dfrac{\cos\alpha(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1)}{\sin\alpha(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1)}=\cos\alpha$

ài 17. Không dùng máy tính bỏ túi và bảng số, **tính** $\sin 18^0$.

Giải

Ta có $\sin 54^0 = \cos 36^0$

$\Leftrightarrow \sin(3.18^0) = \cos 2.18^0 \Leftrightarrow 3\sin 18^0 - 4\sin^3 18^0 = 1 - 2\sin^2 18^0$.

Đặt $u = \sin 18^0$. Ta có: $4u^3 - 2u^2 - 3u + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (u-1)(4u^2 + 2u - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

vì $u \neq 1$ và $u > 0$, ta lấy $u = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

ài 18. Chứng minh rằng $\tan^2 20^0$ là một nghiệm phương trình

$$x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$$

Giải

Ta có: $\tan 60^0 = \tan(3.20^0) = \dfrac{3\tan 20^0 - \tan^3 20^0}{1 - 3\tan^2 20^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3\tan 20^0 - \tan^3 20^0}{1 - 3\tan^2 20^2} \Rightarrow 3(1 - 3\tan^2 20^0)^2 = (3\tan 20^0 - \tan^3 20^0)^2$$

$\Rightarrow \tan^6 20^0 - 33\tan^4 20^0 + 27\tan^2 20^0 - 3 = 0$

Vậy $\tan^2 20^0$ là nghiệm phương trình $x^3 - 33x^2 + 27x - 3 = 0$

ài 19. Chứng minh rằng $\tan x.\tan(\dfrac{\pi}{3} - x).\tan(\dfrac{\pi}{3} + x) = \tan 3x$

Áp dụng tính chất: $P = \tan\dfrac{\pi}{9}.\tan\dfrac{2\pi}{9}.\tan\dfrac{3\pi}{9}.\tan\dfrac{4\pi}{9}$

Giải

Ta có: $\tan x.\tan(\dfrac{\pi}{3} - x).\tan(\dfrac{\pi}{3} + x)$

$$= \tan x.\frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan x}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan x}.\frac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan x}$$

$$= \tan x.\frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3}\tan x}.\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 - \sqrt{3}\tan x} = \tan x.\frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \tan 3x.$$

Áp dụng: $\tan\frac{\pi}{9}.\tan\frac{2\pi}{9}.\tan\frac{4\pi}{9}.\tan\frac{\pi}{3}$

$= \left[\tan\frac{\pi}{9}.\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{9}\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\right)\right]\tan\frac{\pi}{3}$

$= \tan\frac{3\pi}{9}.\tan\frac{\pi}{3} = \left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

Bài 20. Rút gọn biểu thức

a) $A = 2\sin x(\cos x + \cos 3x + \cos 5x)$

Áp dụng: Tính $x = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$

b) $B = 4\cos x\cos(\frac{\pi}{3} - x).\cos(\frac{\pi}{3} + x)$; c) $C = 4\sin x\sin(\frac{\pi}{3} - x).\sin(\frac{\pi}{3} + x$

Giải

a) $A = 2\sin x\cos x + 2\sin x\cos 3x + 2\sin x\cos 5x$

$= \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x = \sin 6x$

Ta có: $x = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7})$

$= \dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}.\sin\frac{6\pi}{7} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}$ (vì $\sin\frac{6\pi}{7} = \sin(\pi - \frac{\pi}{7}) = \sin\frac{\pi}{7}$.

b) $B = \cos x[\cos\frac{2\pi}{3} + \cos 2x] = 2\cos x(-\frac{1}{2} + 2\cos^2 x - 1)$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos 3x.$

c) $C = 2\sin x(\cos 2x - \cos\frac{2\pi}{3}) = 2\sin x(1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{2}) = 3\sin x - 4\sin^3 x = si$

Bài 21. Chứng minh các đẳng thức

a) $\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}(\cos\alpha - \cos 3x)$; b) $\sin^3\alpha\cos\alpha = \frac{1}{8}(2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha)$

c) $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha$

Giải

a) Ta có: $\frac{1}{4}(\cos\alpha - \cos 3\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\sin\alpha = \sin^2\alpha\cos\alpha$

b) Ta có: $\frac{1}{8}(2\sin2\alpha - \sin4\alpha) = \frac{\sin2\alpha}{4}(1 - \cos2\alpha)$

$= \frac{1}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin^2\alpha) = \sin^3\alpha.\cos\alpha$

c) Ta có: $4\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha = 2\sin\alpha[\cos\alpha - \cos5\alpha]$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos5\alpha = \sin2\alpha - [\sin6\alpha + \sin(-4\alpha)]$

$= \sin2\alpha + \sin4\alpha - \sin6\alpha$

Bài 22. Cho tam giác ABC. Chứng minh

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\sin2A + \sin2B + \sin2C = 4\sin A\sin B\sin C$

Giải

a) Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$ (vì $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{C}{2}$)

$= 2\cos\frac{A}{2}(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2})$ (vì $\sin\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right)$

$= \cos\frac{B+C}{2}) = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = \cos A + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$= \cos A + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}$

$= 1 - 2\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2}) = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) Ta có: $\sin2A + \sin2B + \sin2C = \sin2A + 2\sin(B + C)\cos(B - C)$

$= 2\sin A\cos A + 2\sin A\cos(B - C) = 2\sin A[\cos A + \cos(B - C)]$

$= 2\sin A[\cos(B - C)] - \cos(B + C)]$

(vì $B + C = \pi - A \Rightarrow \cos(B + C) = -\cos A$)

$= 4\sin A\sin B\sin C$

Bài 23. Cho tam giác ABC. Chứng minh các đẳng thức

a) $\dfrac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

b) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

Giải

a) Ta có: $\sin A + \sin B - \sin C = \sin A + 2\cos\dfrac{B+C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$

$= 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2} + 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$

$= 2\sin\dfrac{A}{2}[\sin\dfrac{B+C}{2} + \sin\dfrac{B-C}{2}] = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

Theo bài 22; a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

Vậy $\dfrac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \dfrac{4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}} = \tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}$

b) Ta có: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \dfrac{1+\cos 2A}{2} + \dfrac{1+\cos 2B}{2} + \cos^2 C$

$= 1 + \dfrac{1}{2}[\cos 2A + \cos 2B] + \cos^2 C = 1 + \cos(A+B)\cos(A-B) + \cos^2 C$

$= 1 - \cos C\cos(A-B) + \cos^2 C = 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C]$

$= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

Bài 24. a) Chứng minh rằng nếu $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$; $\alpha > 0$; $\beta > 0$

Thì: $\tan\alpha.\tan\beta \le \dfrac{1}{3}$

b) Cho tam giác ABC. Chứng minh $\sin\dfrac{A}{2} \le \dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$

(a; b; c là độ dài ba cạnh của tam giác)

Giải

a) Ta có: $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \tan(\alpha + R) = \tan\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan\alpha.\tan\beta = \tan\alpha + \tan\beta$

vì $\alpha, \beta > 0$ và $\alpha + \beta > 60^0 \Rightarrow \tan\alpha > 0, \tan\beta > 0$.

Theo bất đẳng thức Côsi, $\tan\alpha + \tan\beta \geq 2\sqrt{\tan\alpha.\tan\beta}$

$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan\alpha.\tan\beta \geq 2\sqrt{\tan\alpha.\tan\beta}$

Đặt $t = \sqrt{\tan\alpha.\tan\beta}$, ta có $\sqrt{3} - \sqrt{3}t^2 \geq 2t$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}t^2 + 2t - \sqrt{3} \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy $\sqrt{\tan\alpha.\tan\beta} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\alpha\tan\beta \leq \frac{1}{3}$

b) Ta có $\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} \Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2} \leq \frac{a^2}{4bc}$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{2} \leq \frac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow 1 - \cos A \leq \frac{a^2}{2bc}$ (*)

Theo định lí Côsin, ta có: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\Rightarrow 1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}$

Vậy (*) $\Leftrightarrow 2bc - b^2 - c^2 + a^2 \leq 0 \Leftrightarrow (b-c)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Bài 25. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\sin^6 x + \cos^6 x$, với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{1}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha}$, với $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

Giải

a) Ta có $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$

vì $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq 2\alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \sin 2\alpha \leq 1$

$\Rightarrow \sin^2 2\alpha \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha \geq \frac{1}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$ là $\frac{1}{4}$

Đặt được khi $x = \frac{\pi}{4}$

b) Xét $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ Tương tự, trên $\Rightarrow 0 \le 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha} \ge 2$. Dấu "=" xảy ra, khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Bài 1. Đơn giản biểu thức

a) $A = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ $(0 < \alpha < \pi)$; b) $B = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

c) $C = \frac{1}{\sin\alpha - \sqrt{\cot^2 x - \cos^2 x}}$; $\pi < x < 2\pi$

Giải

a) $A = \sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} - \sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|} - \frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$

$= \frac{1+\cos\alpha - 1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$ (vì $0 < \alpha < \pi \Rightarrow \sin\alpha > 0$)

b) $B = \frac{2\cos^2\alpha - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$

c) $C = \frac{1}{\sin\alpha - \sqrt{\frac{\cos^2 x}{\sin^2\alpha} - \cos^2 x}} = \frac{1}{\sin\alpha - \sqrt{\frac{\cos^2 x(1-\sin^2\alpha)}{|\sin\alpha|}}}$

$= \frac{1}{\sin\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{|\sin\alpha|}}$ vì $\pi < \alpha < 2\pi \Rightarrow \sin\alpha < 0 \Rightarrow |\sin\alpha| = -\sin\alpha$

Vậy: $C = \frac{\sin\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha$

Bài 2. Cho $\tan\alpha = 2$ Tính:

a) $A = \frac{\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha + 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$; b) $B = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$

Giải

a) Chia tử và mẫu thức của A cho $\cos^3\alpha \ne 0$

($\tan\alpha = 2$ nên $\cos\alpha \ne 0$) Ta có

$A = \frac{\tan^3\alpha - 2 + 3(1+\tan^2\alpha)}{3\tan\alpha(1+\tan^2\alpha) + 2(1+\tan^2\alpha)} = \frac{2^3 - 2 + 3.(1+2^2)}{3.2.(1+2^2) + 2(1+2^2)} = \frac{21}{40}$

b) Ta có: $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + 2^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow \cos^4\alpha = \dfrac{1}{25}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \sin^4\alpha = \dfrac{16}{25}$

Vậy $B = \dfrac{16}{25} + \dfrac{1}{25} = \dfrac{17}{25}$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức

a) $\dfrac{1 + \cos\alpha + \cos^2\alpha + \cos^3\alpha}{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \cot\alpha$

b) $\dfrac{\sin\alpha + \sin3\alpha + \sin5\alpha + \sin7\alpha}{\cos\alpha - \cos3\alpha + \cos5\alpha - \cos7\alpha} = \cot\alpha$

Giải

a) Biểu thức vế trái (VT), ta có:

$$VT = \frac{(1 + \cos 2\alpha) + \cos\alpha + \cos3\alpha}{2\sin\alpha(\cos\alpha + \cos2\alpha)}$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha(\cos\alpha + \cos2\alpha)} = \frac{\cos\alpha(\cos\alpha + \cos2\alpha)}{\sin\alpha(\cos\alpha + \cos2\alpha)} = \cot\alpha$$

b) Biến đổi vế trái (VT), ta có:

$$VT = \frac{(\sin\alpha + \sin7\alpha) + (\sin3\alpha + \sin5\alpha)}{(\cos\alpha - \cos7\alpha) - (\cos3\alpha - \cos5\alpha)} = \frac{2\sin4\alpha\cos3\alpha + 2\sin4\alpha\cos\alpha}{+2\sin4\alpha\sin3\alpha - 2\sin4\alpha\sin\alpha}$$

$$= \frac{\cos3\alpha + \cos\alpha}{\sin3\alpha - \sin\alpha} = \frac{2\cos2\alpha\cos\alpha}{2\cos2\alpha\sin\alpha} = \cot\alpha$$

Bài 4. Cho $\dfrac{2\sin a - \sin2a}{2\sin a + \sin2a} = 2$ (*); $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$. Tính sin2a

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{2\sin a - \sin2a\cos a}{2\sin a + \sin2a\cos a} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2\sin a(1 - \cos a)}{2\sin a(1 + \cos a)} = 2$

$\Leftrightarrow 1 - \cos a = 2 + 2\cos a \Leftrightarrow \cos a = -\dfrac{1}{3}$

vì $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Vậy $\sin2a = 2\sin a\cos a = 2.\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}.\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{-4\sqrt{2}}{9}$

Bài 5. Cho $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{8}{5}}$; $0 < x < \frac{\pi}{4}$. Tính $A = \sin 2x + \cos 2x$

Giải

Ta có $\sin x + \cos x = \sqrt{\frac{8}{5}} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{8}{5}$

$\Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = \frac{8}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{3}{5}$

vì $0 < \pi < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < 2x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 2x = \sqrt{1 - \sin^2 2x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

Vậy $A = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

Bài 6. Rút gọn các biểu thức

a) $A = \cot 2x + \frac{1}{\sin 2x} + \tan x$; b) $B = \frac{\cot^2 2x - 1}{2\cot 2x} - \cos 8x.\cot 4x$

Giải

a) $A = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 2x} + \tan x = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} + \tan x$

$= \frac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x} + \tan x = \cot x + \tan x$

b) Ta có: $\frac{\cot^2 2x - 1}{2\cot 2x} = \frac{\frac{1}{\tan^2 2x} - 1}{\frac{2}{\tan 2x}} = \frac{1 - \tan^2 2x}{2\tan 2x} = \frac{1}{\tan 4x}$

$\cos 8x.\cot 4x = \frac{1 - \tan^2 4x}{1 + \tan^2 4x} \cdot \frac{1}{\tan 4x}$

Vậy $B = \frac{1}{\tan 4x} - \frac{1 - \tan^2 4x}{(1 + \tan^2 4x)\tan 4x}$

$= \frac{1 - \tan^2 4x - 1 + \tan^2 4x}{\tan 4x(1 + \tan^2 4x)} = \frac{2\tan 4x}{1 + \tan^2 4x} = \sin 8x$

Bài 7. Tam giác ABC có $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{1}{2}(\tan A + \tan B)$ (*)

Chứng minh tam giác ABC cân tại C.

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sin\dfrac{A+B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}} = \dfrac{\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}}{\cos A.\cos B}$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B = \cos^2\dfrac{A+B}{2}$

$\Leftrightarrow \cos(A+B) + \cos(A-B) = 1 + \cos(A+B) \Leftrightarrow \cos(A-B) = 1$

Vì $0 < A; B < \pi \Rightarrow 0 < |A-B| < \pi$

$A - B = 0 \Leftrightarrow A = B \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại C

Bài 8. Tam giác ABC có $\dfrac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \tan A$ (*)

Chứng minh tam giác ABC vuông

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \dfrac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$\Leftrightarrow \sin A\cos A + \cos A\cos B = \sin A\sin B + \sin A\cos A$

$\Leftrightarrow \cos A\cos B - \sin A\sin B = 0$

$\Leftrightarrow \cos(A+B) = 0$ vì $0 < A + B < \pi$, nên $A + B = \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại tại C

Bài 9. Tam giác ABC có: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ (*)

Chứng minh tam giác ABC là tam giác đều:

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = 4\sin A\sin B\sin C$

(xin bạn xem bài toán 23, chương VI)

$\Leftrightarrow 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = 1 \Leftrightarrow 4\sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2} - \cos\dfrac{A+B}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 4\sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2} - \sin\dfrac{C}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\dfrac{C}{2} - 4\cos\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{C}{2} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos^2\frac{A-B}{2} + 1 - \cos^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right)^2 + \sin^2\frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\dfrac{C}{2} - \cos\dfrac{A-B}{2} = 0 \quad (1) \\ \sin\dfrac{A-B}{2} = 0 \qquad\qquad (2) \end{cases}$$

Vì $0 \le \left|\frac{A-B}{2}\right| \le \frac{\pi}{2}$, nên từ (2) $\Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow 2\sin\frac{C}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$;

Vì $0 < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$

Vậy ΔABC đều

Bài 10. Rút gọn biểu thức

a) $S = \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos 2x}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^n x}\right)$

b) $S = \frac{1}{\cos x\cos 2x} + \frac{1}{\cos 2x\cos 3x} + \ldots + \frac{1}{\cos nx\cos(n+1)x}$

Giải

a) $S = \frac{1+\cos x}{\cos x}.\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x} \ldots \frac{1+\cos 2^n x}{\cos 2^n x}$

$$= \frac{2\cos^2\frac{x}{2}.2\cos^2 x \ldots 2\cos 2^{n-1}x}{\cos x.\cos 2x \ldots \cos 2^n x} = \frac{2^n.\cos^2\frac{x}{2}.\cos x\cos 2x \ldots \cos 2^{n-1}x}{\cos 2^n x}$$

$$= \frac{2^n.\cos\frac{x}{2}.\sin x\cos x\cos 2x \ldots \cos 2^{n-1}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos 2^n x} \left(\sin\frac{x}{2} \ne 0\right) = \ldots \cot\frac{x}{2}.\tan 2^n x$$

(Nếu $\sin\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ta có $S = 2^n$)

b) Ta có: Với $\sin x \ne 0$

$$S\sin x = \frac{\sin x}{\cos x\cos 2x} + \frac{\sin x}{\cos 2x\cos 3x} + \ldots + \frac{\sin x}{\cos nx.\cos(n+1)x}$$

$$= (\tan 2x - \tan x) + (\tan 3x - \tan 2x) + \ldots + [\tan(n+1)x - \tan nx]$$

$= \tan nx - \tan x \Rightarrow D = \dfrac{\tan nx - \tan x}{\sin x}$

Nếu $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thì $P = \pm n$

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN

1. Có bao nhiêu giá trị khác nhau của $\sin k\dfrac{2\pi}{5}$; $k \in \mathbb{Z}$

A. 3; B. 5; C. 2; D. 4

2. Cho $\tan x = 3$

Tính giá trị biểu thức: $\dfrac{2\sin x + 3\cos x}{4\sin x - 5\cos x}$

A. $\dfrac{9}{7}$; B = $\dfrac{3}{7}$; C = $\dfrac{-5}{7}$; D = $\dfrac{4}{7}$

3. Rút gọn biểu thức

$\sin^2\alpha.\tan^2\alpha + 4\sin^2\alpha - \tan^2\alpha + 3\cos^2\alpha$ ta được kết quả

A. 2; B. 3; C. 1; D. 0

4. Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = m$

Tính $|\sin\alpha - \cos\alpha|$ ta có kết quả

A. $\sqrt{1 - m^2}$; B. $\sqrt{2 - m^2}$; C. $|m|$; D. $\sqrt{\dfrac{m^2 - 1}{2}}$

5. Rút gọn biểu thức $\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + \sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$ ta có kết quả

A. $\dfrac{2}{\sin\alpha}$; B. $\dfrac{2}{-\sin\alpha}$; C. $\dfrac{2}{|\sin\alpha|}$; D. $\dfrac{|1 - \cos x| + |1 + \cos x|}{\sin\alpha}$

6. Biểu thức sau đây

$\cos(\dfrac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi - x) + \cos(\dfrac{3\pi}{2} - x) + \cos(x - 2\pi)$ bằng:

A. 1; B. 3cosx; C. 0; D. 2cosx

7. Kết quả phép tính $\sin(\alpha + \beta)$, khi biết $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\cos\beta = -\dfrac{5}{13}$

$\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ là

A. $\dfrac{63}{65}$; B. $-\dfrac{63}{65}$; C. $\dfrac{33}{65}$; D. 1

8. Cho $\tan\frac{x}{2} = m$; tính $\frac{1-\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\tan x} + 4\sin x$ theo m,

ta được

A. $\frac{t^4 - 18t^2 + 1}{2(t + t^2)}$; B. $\frac{t^4 + 18t^2 + 1}{2t(1 - t^2)}$; C. $\frac{t^4 + 18t^2 - 1}{2t(1 + t^2)}$; D. $\frac{t^4 + 18t^2 + 1}{2t(1 + t^2)}$

9. Biểu thức cosx – sinx bằng

A. $\sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{2})$ B. $\sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{4})$

C. $\sin(\frac{\pi}{4} - x)$ D. $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + x)$

10. Biểu thức $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ bằng

A. $2\cos(x - \frac{\pi}{3})$ B. $\cos(x - \frac{\pi}{3})$

C. $2\sin(x - \frac{\pi}{3})$ D. $2\cos(x + \frac{\pi}{3})$

Đáp án

1. B; **2.** A; **3.** B; **4.** B; **5.** C
6. C; **7.** C; **8.** D; **9.** B; **10.** A.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 1. Cho phương trình $x^2 - (m - 3)x + 6 - m = 0$ (*)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu

b) Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm dương

Giải

a) Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi A và C trái dấu; ở đây A = 1; C = 6 – m

vậy $6 - m < 0 \Leftrightarrow m > 6$

b) (*) Theo a) Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi m > 6. Vậy với m > 6. Phương trình có đúng một nghiệm dương.

(*) Xét $\Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases}$

- m = 5: (*) $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 > 0$ (thỏa)
- m = –3: (*) $\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -3 < 0$ (loại)

Đáp số: m = 5 hoặc m > 6

Bài 2. Tìm giá trị của a sao cho phương trình

$$x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0 \qquad (1)$$

Có hai nghiệm phân biệt và đều lớn hơn 3.

Giải

Đặt $y = x - 3 \Rightarrow x = y + 3$ ta có phương trình

$$(y + 3)^2 - 6a(y + 3) + 2 - 2a + 9a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + (6 - 6a)y + 9a^2 - 20a + 11 = 0 \ (2)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 3 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2 > 0 \\ 9a^2 - 20a + 11 > 0 \\ 6a - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ \left[\begin{array}{l} a > \dfrac{11}{9} \\ a < 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{11}{9}$$

Bài 3. Tìm m để phương trình $x^4 + (1 - 2m)x^2 + m^2 - 1 = 0$. Có:

a) Bốn nghiệm phân biệt b) Đúng ba nghiệm c) Đúng hai nghiệm

Giải

Đặt $y = x^2$; $y \geq 0$. Ta có phương trình

$$y^2 + (1 - 2m)y + m^2 - 1 = 0 \ (*)$$

a) Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt nếu và chỉ nếu phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

Điều đó tương đương với.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 2m)^2 - 4(m^2 - 1) > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4m > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \\ 2m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{5}{4} \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \\ m > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 < m < \frac{5}{4}$$

b) Điều kiện cần để phương trình đã cho có ba nghiệm là phương trình (*) phải có một nghiệm $y = 0$

Khi $y = 0$, ta có: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

- Với $m = 1$ ta có $(*) \Leftrightarrow y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 2 > 0 \end{array}\right.$

Vậy $m = 1$, phương trình đã cho có đúng ba nghiệm

$$x = 0; \pm\sqrt{2}$$

• Với m = −1. Ta có: (*) $\Leftrightarrow y^2 + 3y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -3 \end{array}\right.$

Vậy m = −1 không thỏa điều kiện bài toán

Đáp số: m = 1

c) + Trường hợp 1: $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$. Khi đó:

$(*) \Leftrightarrow y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} > 0$

Khi đó: $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $m = \frac{5}{4}$

+ Trường hợp 2. Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow$ $m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Đáp số: $m = \frac{5}{4}$ hoặc $-1 < m < 1$

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - 4x + 3|x - 2| + m = 0$

a) Giải phương trình với m = 6

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

Giải

a) Với m = 6. Ta có phương trình

$$x^2 - 4x + 3|x - 2| + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 3|x - 2| + 2 = 0$$

Đặt $u = |x - 2|$; $u \geq 0$ Ta có phương trình

$$u^2 + 3u + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \text{ (loại)} \\ u = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

b) Đặt $u = |x - 2|$; $u \geq 0$ ta có phương trình $u^2 + 3u + m - 4 = 0$ (*)

+ $\Delta = 25 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{25}{4}$

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow u^2 + 3u + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow u = -\frac{3}{2}$ (loại)

+ $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{25}{4}$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt u_1; u_2

Giả sử $u_1 < u_2$. Ta xét các khả năng sau

+ $u_1 < 0 < u_2 \Leftrightarrow P > 0 \Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$

Khi đó phương trình (*) có nghiệm $u_2 > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm

$$+\ 0 < u_1 < u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{25}{4} \\ m - 4 > 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ -3 > 0 \end{cases}$$

+ Phương trình (*) có một nghiệm $u = 0$ thế vào (*) ta được: $m = 4$

Đáp số: $m \le 4$

Cách khác: ta có $(*) \Leftrightarrow m = -u^2 - 3u + 4$ (**). Lập bảng biến thiên cho hàm số $f(x) = -u^2 - 3u + 4$; $\forall u \ge 0$, ta có kết quả trên.

Bài 5. Tìm m để phương trình $(x - 1)^4 + (x - 3)^4 = 2m$ có nghiệm

Giải

Đặt $y = \dfrac{x - 1 + x - 3}{2} \Leftrightarrow y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$

Ta có phương trình: $y^4 + 6y^2 + 1 - m = 0$ (*)

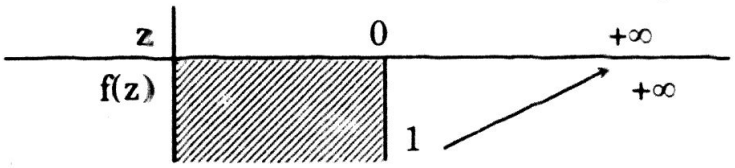
Đặt $z = y^2$, $z \ge 0$

Ta có phương trình: $z^2 + 6z + 1 - m = 0$

$\Leftrightarrow m = z^2 + 6z + 1$ (**)

Xét hàm số: $f(z) = z^2 + 6z + 1$, $\forall z \ge 0$

$A = 1 > 0$; $-\dfrac{B}{2A} = -3$. Ta có bảng biến thiên



Vậy điều kiện bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có nghiệm $z \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 1$

Bài 6. Tìm giá trị của m để phương trình

$$x^4 - 2x^3 - (2m + 1)x^2 + 2x + 1 = 0$$

Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1

Giải

Ta thấy $x = 0$ không thỏa phương trình. Chia hai vế phương trình cho $x^2 \ne 0$, ta được:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 2m - 1 = 0$$

Đặt $y = x - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - yx - 1 = 0$ (1)

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, ta có: $t^2 + (2 - y)t - y = 0$ (2)

MỤC LỤC

ỜI NÓI ĐẦU 3

CHƯƠNG I. MỆNH ĐỀ. TẬP HỢP 5

§1. Mệnh đề 5

§2. Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học 10

§3. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp 12

§4. Số gần đúng và sai số 16

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 19

ĐÁP ÁN 20

CHƯƠNG II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI 20

§1. Đại cương bậc nhất và bậc hai 20

§2. Hàm số bậc nhất 33

§3. Hàm số bậc hai 39

ÔN TẬP CHƯƠNG II 49

MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 54

ĐÁP ÁN 55

CHƯƠNG III. PHƯƠNG TRÌNH HỆ PHƯƠNG TRÌNH 55

§1. Đại cương về phương trình 55

§2. Phương trình bậc nhất và phương trình bậc hai một ẩn 60

§3. Một số phương trình quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai 68

§4. Phương trình và hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn 73

§5. Một số ví dụ về hệ phương trình bậc hai hai ẩn 79

ÔN TẬP CHƯƠNG III 90

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM 99

ĐÁP ÁN 100

CHƯƠNG IV. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH 100

§1. Bất đẳng thức và chứng minh bất đẳng thức 100

§2. Đại cương về bất phương trình 116

§3. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn 119

§4. Dấu của nhị thức bậc nhất 125

§5. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 132

§6. Dấu của tam thức bậc hai 137

§7. Bất phương trình bậc hai 143

§8. Một số phương trình và bất phương trình quy về bậc hai 154

ÔN TẬP CHƯƠNG IV **163**
MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM **171**
ĐÁP ÁN **172**
CHƯƠNG V. THỐNG KÊ **172**
§1 và §2. Khái niệm mở đầu – Trình bày một mẫu số liệu 172
§3. Đặc trưng của mẫu số liệu 177
§4. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác 186
CHƯƠNG VI. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC **183**
§1. Góc và cung lượng giác 184
§2. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác 186
§3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) co liên quan đặc biệt 194
§4. Một số công thức lượng giác 198
ÔN TẬP CHƯƠNG VI **214**
MỘT SỐ CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN **219**
ĐÁP ÁN **220**
ÔN TẬP CUỐI NĂM **220**